1

解答解説のページへ

1 から 5 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 2 枚ずつ，合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し，その数字を X，Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1)　$X = Y$ となる確率を求めよ。

(2)　$X = 3$ となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$において，$a_1=2$，$a_2=4$である。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおくとき，$\{b_n\}$は正の公比をもつ等比数列とする。

(1) $\dfrac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}$を，$b_n$，$b_{n+1}$を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=-1456$が成り立つとき

(i) 一般項b_nを求めよ。

(ii) 一般項a_nを求めよ。

3

解答解説のページへ

a は実数とする。2 つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。

4

解答解説のページへ

α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1)　複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき，w の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2)　複素数平面上で，z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。

1

問題のページへ

(1)　10 枚から 2 枚を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 通りが，同様に確からしい。

$X = Y$ となる場合は 5 通りより，その確率は，

$$\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

(2)　$X = 3$ となるとき, Y は $Y = 3,\ 4,\ 5$ のいずれかである。

(i)　$X = 3$，$Y = 3$ のとき　その確率は $\dfrac{1}{45}$

(ii)　$X = 3$，$Y = 4$ のとき　その確率は $\dfrac{2\times 2}{45} = \dfrac{4}{45}$

(iii)　$X = 3$，$Y = 5$ のとき　その確率は $\dfrac{2\times 2}{45} = \dfrac{4}{45}$

(i)〜(iii)より，$X = 3$ となる確率は,

$$\frac{1}{45} + \frac{4}{45} + \frac{4}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

(3)　$X = k$ となる確率を $P(k)$ とおくと, (2)から，$P(3) = \dfrac{9}{45}$ である。

すると，同様に考えて，$P(1) = \dfrac{1}{45} + \dfrac{4}{45} + \dfrac{4}{45} + \dfrac{4}{45} + \dfrac{4}{45} = \dfrac{17}{45}$

$P(2) = \dfrac{1}{45} + \dfrac{4}{45} + \dfrac{4}{45} + \dfrac{4}{45} = \dfrac{13}{45}$，$P(4) = \dfrac{1}{45} + \dfrac{4}{45} = \dfrac{5}{45}$，$P(5) = \dfrac{1}{45}$

よって, X の期待値 E は,

$$E = 1\times\frac{17}{45} + 2\times\frac{13}{45} + 3\times\frac{9}{45} + 4\times\frac{5}{45} + 5\times\frac{1}{45} = \frac{19}{9}$$

［解　説］

確率と期待値に関する基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　条件より，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ なので，

$$\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=b_n-b_{n+1}$$

(2)　(i)　条件より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}(b_n-b_{n+1})=-1456$ から，$b_1-b_7=-1456$ ………(＊)

また，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{4}{2}=2$ なので，$b_7=2+1456=1458$

ここで，$\{b_n\}$ の公比を r とすると，$b_7=2r^6$ なので，

$$2r^6=1458\,,\ \ r^6=3^6$$

$r>0$ から，$r=3$ となり，$b_n=2\cdot3^{n-1}$ である。

(ii)　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot3^{n-1}$ より，$a_{n+1}=2\cdot3^{n-1}a_n$ となり，$n\geqq2$ において，

$$a_n=a_1(2\cdot3^0)(2\cdot3^1)(2\cdot3^2)\cdots\cdots(2\cdot3^{n-2})=2^n\cdot3^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}$$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=2^1\cdot3^0=2$ となり，成立する。

［解 説］

$a_{n+1}=f(n)a_n$ のタイプの漸化式です。詳細はピンポイントレクチャー「漸化式の解法」第 2 講を参照してください。

3

問題のページへ

$y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$ ……①，$y = ax^2 - 2a^2x - 3a$ ……②に対して，

①より $y' = 3x^2 + 4ax - 3a^2$，②より $y' = 2ax - 2a^2$

ここで，$x = t$ において，①と②が共通の接線をもつとき，

$$t^3 + 2at^2 - 3a^2t - 4 = at^2 - 2a^2t - 3a \cdots\cdots\cdots ③$$

$$3t^2 + 4at - 3a^2 = 2at - 2a^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$t^3 + at^2 - a^2t + 3a - 4 = 0$ ………③′

④より，$3t^2 + 2at - a^2 = 0$，$(3t - a)(t + a) = 0$ となり，$t = \dfrac{a}{3}$，$-a$

(i)　$t = \dfrac{a}{3}$ のとき

③′ より，$\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{a^3}{9} - \dfrac{a^3}{3} + 3a - 4 = 0$，$5a^3 - 81a + 108 = 0$

$$(a - 3)(5a^2 + 15a - 36) = 0$$

よって，$a = 3$，$\dfrac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$

(ii)　$t = -a$ のとき

③′ より，$-a^3 + a^3 + a^3 + 3a - 4 = 0$，$a^3 + 3a - 4 = 0$

$$(a - 1)(a^2 + a + 4) = 0$$

a は実数より，$a = 1$

(i)(ii)より，$a = 1$，3，$\dfrac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$

［解 説］

微分法の基本問題です。(i)は係数の大きい 3 次方程式が出現し，計算ミスを疑ってしまいました。

4

問題のページへ

(1) z が原点と点 α を通る直線上の点 $\dfrac{\alpha}{2}$ 以外を動くとき, k を実数とし,

$$z = k\alpha \left(k \neq \frac{1}{2} \right)$$

このとき，$w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha} = \dfrac{k\overline{\alpha}\alpha - 2}{2k\alpha - \alpha}$ となり，$|\alpha| = 1$ より $\alpha\overline{\alpha} = 1$ であるので,

$$w = \frac{k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{k-2}{2k-1}\overline{\alpha}$$

よって，点 w は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にある。

(2) $w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ より，$(2z - \alpha)w = \overline{\alpha}z - 2$，$(2w - \overline{\alpha})z = \alpha w - 2$ ………①

ここで，$w = \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ とすると，$\alpha w - 2 = \dfrac{\alpha\overline{\alpha}}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}$ となり，①は成立しない。

よって，$w \neq \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ から，$z = \dfrac{\alpha w - 2}{2w - \overline{\alpha}}$ ………②

さて，条件から，$|z| > 1$ なので,

$$\left| \frac{\alpha w - 2}{2w - \overline{\alpha}} \right| > 1,\ \frac{|\alpha w - 2|}{|2w - \overline{\alpha}|} > 1,\ |\alpha w - 2| > |2w - \overline{\alpha}|$$

$$(\alpha w - 2)(\overline{\alpha}\overline{w} - 2) > (2w - \overline{\alpha})(2\overline{w} - \alpha),\ \alpha\overline{\alpha}w\overline{w} + 4 > 4w\overline{w} + \alpha\overline{\alpha}$$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$ から，$w\overline{w} < 1$ となり，$|w| < 1$ である。

よって，点 w は中心が原点，半径が 1 の円の内部を動く。ただし $\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ を除く。

［解 説］

複素数平面上の変換に関する基本問題です。2 つの設問とも頻出です。