1

解答解説のページへ

(1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1)\geqq\log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2) $x,\ y$ が(1)の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について，$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$とする。

(1)　$A^3=E$ となるための必要十分条件を, a, b を用いて表せ。

(2)　(1)の条件が成立するとき, すべての自然数 k ($k=1,\ 2,\ \cdots$) に対して

$$A^{2^k}+A^{2^{k-1}}+E=O$$

であることを示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

以下において $\log x$ は自然対数を表す。

(1)　$a > \dfrac{1}{e}$ のとき, $x > 0$ に対し $x^a > \log x$ であることを示せ。

(2)　$a > \dfrac{1}{e}$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^a \log x = 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0 < t < \dfrac{1}{e}$ として, 曲線 $y = x\log x$ $(t \leqq x \leqq 1)$ および x 軸と直線 $x = t$ で囲まれた部分を, y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき, $\displaystyle\lim_{t\to+0} V(t)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1)　複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき，w の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2)　複素数平面上で，z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。

1

問題のページへ

(1) $\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$ に対して，

まず，$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1>0$ ………①

$-2x^2+2x+1>0$ ………②

①②のもとで，$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1 \geqq -2x^2+2x+1$ ………③

ここで，②③より，①はつねに成り立つ。

③を整理して，$y^2+(2x-1)y-(x^4-2x^3-x^2+2x) \leqq 0$

$y^2+(2x-1)y-(x^2-1)(x^2-2x) \leqq 0$

$\{y+(x^2-1)\}\{y-(x^2-2x)\} \leqq 0$ ………④

②より，$2x^2-2x-1<0$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

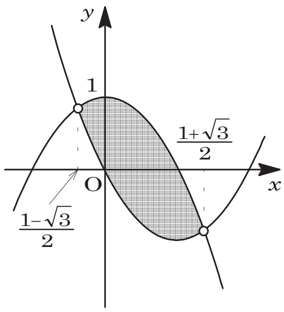
また，④で表される領域の境界線の方程式は，

$y=-x^2+1$ ………⑤，$y=x^2-2x$ ………⑥

⑤⑥の共有点は，$-x^2+1=x^2-2x$ より，

$2x^2-2x-1=0$，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

さて，点$(0,\ -1)$は④を満たさないので，②かつ④の満たす領域は右図の網点部となる。なお，白丸以外の境界線は領域に含む。



(2) $x+y=k$ ……⑦とおき，直線⑦と(1)の領域が共有点をもつ k の範囲を求める。

まず，⑤と⑦が接するのは，$x+(-x^2+1)=k$，$x^2-x+k-1=0$

$D=1-4(k-1)=0$，$k=\dfrac{5}{4}$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

次に，⑥と⑦が接するのは，$x+(x^2-2x)=k$，$x^2-x-k=0$

$D=1+4k=0$，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

以上より，$x+y$ の最大値は $\dfrac{5}{4}$，最小値は $-\dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

④の左辺を因数分解することに，やや時間を取られることを除くと，見かけよりはるかに基本的です。

2

問題のページへ

$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x) = 3\cos 2x + 7\cos x = 3(2\cos^2 x - 1) + 7\cos x$
$= 6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = (3\cos x - 1)(2\cos x + 3)$

ここで，$\cos\alpha = \frac{1}{3}\ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \alpha$ で $f(x) \geqq 0$，$\alpha \leqq x \leqq \pi$ で $f(x) \leqq 0$ となり，

$$I = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\pi} -f(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\alpha} (3\cos 2x + 7\cos x)\,dx - \int_{\alpha}^{\pi} (3\cos 2x + 7\cos x)\,dx$$
$$= \left[\frac{3}{2}\sin 2x + 7\sin x\right]_0^{\alpha} - \left[\frac{3}{2}\sin 2x + 7\sin x\right]_{\alpha}^{\pi}$$
$$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha + 7\sin\alpha - \frac{3}{2}(0 - \sin 2\alpha) - 7(0 - \sin\alpha)$$
$$= 3\sin 2\alpha + 14\sin\alpha$$

そこで，$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ から，

$$I = 3\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9} + 14\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$$

［解 説］

$f(x) = 0$ となる x は求まらないので，この値を α として，α の条件を念頭におきながら計算をすすめる問題です。

3

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$A^2-(a-a-1)A+\{a(-a-1)+b\}E=O$$

よって，$A^2+A-(a^2+a-b)E=O$ ……①から，$A^2=-A+(a^2+a-b)E$ より，

$$\begin{aligned} A^3&=A\{-A+(a^2+a-b)E\}=-A^2+(a^2+a-b)A \\ &=A-(a^2+a-b)E+(a^2+a-b)A \\ &=(1+a^2+a-b)A-(a^2+a-b)E \end{aligned}$$

条件より，$A^3=E$ なので，

$$(1+a^2+a-b)A-(a^2+a-b+1)E=O,\ (1+a^2+a-b)(A-E)=O$$

$A\neq E$ より，$1+a^2+a-b=0$ ………②

(2)　①②より，$A^2+A+E=O$ ………③

以下，すべての自然数 k に対して，$A^{2^k}+A^{2^{k-1}}+E=O$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=1$ のとき　③より成り立つ。

(ii)　$k=l$ のとき　$A^{2^l}+A^{2^{l-1}}+E=O$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} A^{2^{l+1}}+A^{2^l}+E&=(A^{2^l})^2+A^{2^l}+E=(-A^{2^{l-1}}-E)^2+A^{2^l}+E \\ &=A^{2^l}+2A^{2^{l-1}}+E+A^{2^l}+E=2(A^{2^l}+A^{2^{l-1}}+E)=O \end{aligned}$$

よって，$k=l+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対して，$A^{2^k}+A^{2^{k-1}}+E=O$ である。

［解 説］

(2)では指数の部分がややこしいので，指数法則についてのミスをしそうです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^a-\log x$ とおくと，$f'(x)=ax^{a-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^a-1}{x}$

$f'(x)=0$ の解は $x=\dfrac{1}{\sqrt[a]{a}}$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[a]{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right)=\frac{1}{a}-\log a^{-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}(1+\log a)$$

$a>\dfrac{1}{e}$ から，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[a]{a}}\right)>\dfrac{1}{a}\left(1+\log\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{a}(1-\log e)=0$

よって，$f(x)>0$ から，$x^a>\log x$ である。

(2)　$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ から，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^a\log x=-\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t^a}$

(1)より，$a=\dfrac{1}{e}$ のとき $f(x)\geqq 0$ なので，$x^{\frac{1}{e}}\geqq\log x$ となり, $t>1$ において,

$$\frac{t^{\frac{1}{e}}}{t^a}\geqq\frac{\log t}{t^a}<0,\quad \frac{1}{t^{a-\frac{1}{e}}}\geqq\frac{\log t}{t^a}<0$$

すると，$a>\dfrac{1}{e}$ なので，$t\to\infty$ のとき $t^{a-\frac{1}{e}}\to\infty$ から，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t^a}=0$ となり，

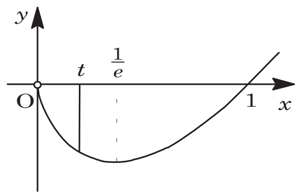
$$\lim_{x\to+0}x^a\log x=0$$

(3)　$y=x\log x$ に対して，$y'=\log x+1$

$y'=0$ の解は $x=\dfrac{1}{e}$ であり，$0<t<\dfrac{1}{e}$ から，

$t\leqq x\leqq 1$ における増減は右表のようになり,

x	t	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	$t\log t$	$\searrow$		$\nearrow$	0



$$\begin{aligned}V(t)&=\int_t^1 2\pi x(-x\log x)\,dx\\&=-2\pi\int_t^1 x^2\log x\,dx\\&=-2\pi\left\{\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_t^1-\int_t^1\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}\\&=2\pi\left\{\frac{t^3}{3}\log t+\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_t^1\right\}\\&=2\pi\left\{\frac{t^3}{3}\log t+\frac{1}{9}(1-t^3)\right\}\end{aligned}$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t^3\log t=0$ なので，$\displaystyle\lim_{t\to+0}V(t)=\frac{2}{9}\pi$ となる。

［解　説］

(1)と(2)を結ぶ糸が曖昧なため, (2)にはかなりの時間が必要でした。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) z が原点と点 α を通る直線上の点 $\dfrac{\alpha}{2}$ 以外を動くとき, k を実数とし,

$$z = k\alpha \ \left(k \neq \frac{1}{2}\right)$$

このとき, $w = \dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha} = \dfrac{k\overline{\alpha}\alpha-2}{2k\alpha-\alpha}$ となり, $|\alpha|=1$ より $\alpha\overline{\alpha}=1$ であるので,

$$w = \frac{k-2}{2k-1}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{k-2}{2k-1}\overline{\alpha}$$

よって, 点 w は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にある。

(2) $w = \dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ より, $(2z-\alpha)w = \overline{\alpha}z-2$, $(2w-\overline{\alpha})z = \alpha w-2$ ………①

ここで, $w = \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ とすると, $\alpha w - 2 = \dfrac{\alpha\overline{\alpha}}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$ となり, ①は成立しない。

よって, $w \neq \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ から, $z = \dfrac{\alpha w-2}{2w-\overline{\alpha}}$ ………②

さて, 条件から, $|z|>1$ なので,

$$\left|\frac{\alpha w-2}{2w-\overline{\alpha}}\right|>1,\ \frac{|\alpha w-2|}{|2w-\overline{\alpha}|}>1,\ |\alpha w-2|>|2w-\overline{\alpha}|$$

$$(\alpha w-2)(\overline{\alpha}\overline{w}-2)>(2w-\overline{\alpha})(2\overline{w}-\alpha),\ \alpha\overline{\alpha}w\overline{w}+4>4w\overline{w}+\alpha\overline{\alpha}$$

$\alpha\overline{\alpha}=1$ から, $w\overline{w}<1$ となり, $|w|<1$ である。

よって, 点 w は中心が原点, 半径が 1 の円の内部を動く。ただし $\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ を除く。

［解 説］

複素数平面上の変換に関する基本問題です。2 つの設問とも頻出です。