

1

解答解説のページへ

1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。この中からカードを 3 枚同時に取り出す。取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち、最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする。

- (1) $X = 3$ である確率を求めよ。
- (2) X の期待値を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また、 $g(x) = -x^2 + ax + b$ とする。 $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

$\triangle OAB$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおき、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 、 $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ とする。
 辺 AB 上に点 P_1 をとる。ただし P_1 は A 、 B とは異なるとする。 P_1 から辺 OB に垂線 P_1Q_1 を下ろす。次に、 Q_1 から辺 OA に垂線 Q_1R_1 を下ろす。さらに、 R_1 から辺 AB に垂線 R_1P_2 を下ろす。以下、同様の操作を続けて、点 P_n 、 Q_n 、 R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を定める。 $\overrightarrow{AP_n} = t_n(\vec{b} - \vec{a})$ により t_n ($0 < t_n < 1$) を定める。

- (1) $\overrightarrow{BQ_1}$ を t_1 と \vec{b} を用いて表せ。
- (2) t_2 を t_1 を用いて表せ。
- (3) t_n を t_1 と n を用いて表せ。
- (4) $P_1 = P_2$ となるような t_1 の値を求めよ。
- (5) $P_1 = P_2$ のとき、 $\triangle P_1Q_1R_1$ の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a \neq 0, b \neq 0$ とする。 $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c$ について、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているとする。

(1) $y = f(x)$ のグラフが x 軸と接する点の x 座標をすべて求めよ。

(2) さらに $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ が成り立っているとき、 $f(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を満たす x の値をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

a, t を実数とすると、座標平面において、 $x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$ で定義される図形 C を考える。

- (1) すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし、点は円とみなさないものとする。
- (2) $a = 4$ とする。 t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 C が通過してできる領域を求め、図示せよ。
- (3) $a = 6$ とする。 t が $t > 0$ であって、かつ C が円であるような範囲を動くとき、 C が通過してできる領域を求め、図示せよ。

1

問題のページへ

(1) $X = 3$ となるのは、取り出された3枚のカードが、1と2、および3以上が1枚の場合なので、その確率は、

$$\frac{10-2}{{}_{10}C_3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

(2) 3枚のカードに書かれた3つの整数を a, b, c ($a < b < c$) とおき、 $b = k$ のときの $a + b$ の期待値を E_k とすると、

$$\begin{aligned} E_k &= \{(1+k) + (2+k) + \cdots + (k-1+k)\} \cdot \frac{10-k}{{}_{10}C_3} \\ &= \frac{(1+k+k-1+k)(k-1)}{2} \cdot \frac{10-k}{120} = \frac{1}{80} k(k-1)(10-k) \end{aligned}$$

すると、 X の期待値 E は、 $2 \leq k \leq 9$ から、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{80} \sum_{k=2}^9 k(k-1)(10-k) = \frac{1}{80} \sum_{k=1}^9 k(k-1)(10-k) \\ &= \frac{1}{80} \sum_{k=1}^9 (-k^3 + 11k^2 - 10k) \\ &= \frac{1}{80} \left(-\frac{1}{4} \cdot 9^2 \cdot 10^2 + 11 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \right) \\ &= \frac{33}{4} \end{aligned}$$

[解説]

(2)を(1)の続きとして考え、 $X = 4, 5, \dots, 17$ の確率を順に求めていくという見方もできます。しかし、これは大変なので、アプローチの方法を変更しました。

2

問題のページへ

- (1) $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接することより, $p > 1$ として,

$$g(x) = -(x-p)^2 + 1$$

すると, $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = x$ との共有点は,

$$x = -(x-p)^2 + 1, \quad x^2 - (2p-1)x + p^2 - 1 = 0$$

$x < 1$ において接することより,

$$D = (2p-1)^2 - 4(p^2 - 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = \frac{2p-1}{2} < 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } 1 - 4p + 4 = 0, \quad p = \frac{5}{4}$$

この値は $p > 1$ を満たし, しかも $\textcircled{2}$ は $x = \frac{3}{4} < 1$ となり, 成立しているので,

$$g(x) = -\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 1 = -x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16}$$

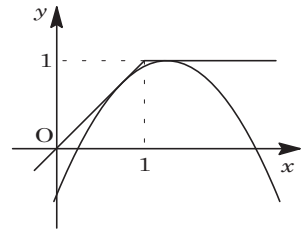
$$\text{よって, } a = \frac{5}{2}, \quad b = -\frac{9}{16}$$

- (2) $x < 1$ における接点は $\textcircled{2}$ より $x = \frac{3}{4}$, $x > 1$ における接点は $x = p = \frac{5}{4}$ から, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \left\{ x - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16} \right) \right\} dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \left\{ 1 - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{16} \right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{3}{4}}^1 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \left(x - \frac{5}{4} \right)^2 dx = \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^3 \right]_{\frac{3}{4}}^1 + \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{5}{4} \right)^3 \right]_1^{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)^3 = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

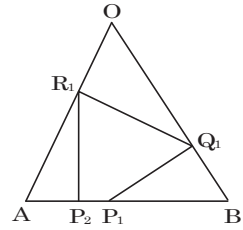
[解説]

微積分の基本問題です。 $y = f(x)$ のグラフが複雑ではないので, 直感に依存した解となっています。



3

問題のページへ



- (1) 条件より,
- $\overrightarrow{AP_1} = t_1(\vec{b} - \vec{a})$
- なので,

$$\overrightarrow{OP_1} = \vec{a} + t_1(\vec{b} - \vec{a}) = (1-t_1)\vec{a} + t_1\vec{b}$$

$\overrightarrow{OQ_1}$ は $\overrightarrow{OP_1}$ の \vec{b} 方向への正射影ベクトルより,

$$\overrightarrow{OQ_1} = \left(\overrightarrow{OP_1} \cdot \frac{\vec{b}}{\sqrt{3}} \right) \frac{\vec{b}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \{ (1-t_1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t_1|\vec{b}|^2 \} \vec{b}$$

ここで, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ から,

$$\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{3}(1-t_1+3t_1)\vec{b} = \frac{1}{3}(2t_1+1)\vec{b}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{BQ_1} = \frac{1}{3}(2t_1+1)\vec{b} - \vec{b} = \frac{2}{3}(t_1-1)\vec{b}$$

- (2)
- $\overrightarrow{OR_1}$
- は
- $\overrightarrow{OQ_1}$
- の
- \vec{a}
- 方向への正射影ベクトルより,

$$\overrightarrow{OR_1} = \left(\overrightarrow{OQ_1} \cdot \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \{ (2t_1+1)\vec{a} \cdot \vec{b} \} \vec{a} = \frac{1}{6}(2t_1+1)\vec{a}$$

さて, $\overrightarrow{AP_2} = t_2(\vec{b} - \vec{a})$ から, $\overrightarrow{OP_2} = (1-t_2)\vec{a} + t_2\vec{b}$ となり,

$$\overrightarrow{R_1P_2} = \left(1-t_2 - \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{6} \right) \vec{a} + t_2\vec{b} = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}t_1 - t_2 \right) \vec{a} + t_2\vec{b}$$

ここで, R_1P_2 と AB は垂直なので, $\overrightarrow{R_1P_2} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ より,

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}t_1 - t_2 \right) |\vec{a}|^2 + \left(t_2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}t_1 + t_2 \right) \vec{a} \cdot \vec{b} - t_2|\vec{b}|^2 = 0$$

よって, $2\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}t_1 - t_2\right) + \left(2t_2 - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}t_1\right) - 3t_2 = 0$ から, $t_2 = -\frac{1}{9}t_1 + \frac{5}{18}$

- (3) (2)と同様にすると,
- $t_{n+1} = -\frac{1}{9}t_n + \frac{5}{18}$
- から,
- $t_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}\left(t_n - \frac{1}{4}\right)$

$$t_n - \frac{1}{4} = \left(t_1 - \frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}, \quad t_n = \left(t_1 - \frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$

- (4)
- $P_1 = P_2$
- から
- $t_1 = t_2$
- となり, (2)から
- $t_1 = -\frac{1}{9}t_1 + \frac{5}{18}$
- なので,
- $t_1 = \frac{1}{4}$
- である。

- (5)
- $t_1 = \frac{1}{4}$
- より,
- $\overrightarrow{OQ_1} = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b}$
- ,
- $\overrightarrow{OR_1} = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a}$

よって, P_1 は AB を $1:3$, R_1 は OA を $1:3$ に内分し, Q_1 は AB の中点から,

$$\triangle P_1Q_1R_1 = \left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\right) \triangle OAB = \frac{5}{16} \triangle OAB$$

さて, $\triangle OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 3 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ より,

$$\triangle P_1Q_1R_1 = \frac{5}{16} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{32}$$

【解説】

難問というわけではありませんが, 設問が 5 つもあるため, かなりの時間を費やしてしまいます。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x + c$ に対して,

$$f'(x) = -2a \cos x \sin x - b \sin x = -\sin x (2a \cos x + b)$$

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているので, $f(0) = f'(0) = 0$ より,

$$a + b + c = 0, \quad c = -a - b \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このとき, $f(x) = a \cos^2 x + b \cos x - a - b = (\cos x - 1)(a \cos x + a + b)$

さて, $y = f(x)$ のグラフが x 軸と $x = t$ で接するとすると, $f(t) = f'(t) = 0$ より,

$$(\cos t - 1)(a \cos t + a + b) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad \sin t (2a \cos t + b) = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②より $\cos t = 1$ または $\cos t = -\frac{a+b}{a}$, ③より $\sin t = 0$ または $\cos t = -\frac{b}{2a}$ となる。

(i) $\cos t = 1, \sin t = 0$ のとき n を整数として, $t = 2n\pi$ である。(ii) $\cos t = 1, \cos t = -\frac{b}{2a}$ のとき

$-\frac{b}{2a} = 1$ すなわち $b = -2a$ の場合には, $t = 2n\pi$ (n は整数) である。

(iii) $\cos t = -\frac{a+b}{a}, \sin t = 0$ のとき

$\sin t = 0$ より $\cos t = \pm 1$ であり, $-\frac{a+b}{a} = \pm 1$ となる。

まず, $-\frac{a+b}{a} = 1$ すなわち $b = -2a$ の場合には, $t = 2n\pi$ (n は整数) である。

また, $-\frac{a+b}{a} = -1$ の場合には $b = 0$ となり, $b \neq 0$ という条件に反する。

(iv) $\cos t = -\frac{a+b}{a}, \cos t = -\frac{b}{2a}$ のとき

$-\frac{a+b}{a} = -\frac{b}{2a}$ すなわち $b = -2a$ の場合には, $\cos t = 1$ となる。

よって, $t = 2n\pi$ (n は整数) である。

(i)~(iv)より, $y = f(x)$ のグラフと x 軸との接点は, $x = 2n\pi$ (n は整数) である。(2) $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ より, $\int_0^{2\pi} \left(a \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + b \cos x + c \right) dx = 0$ となり,

$$\frac{a}{2} \cdot 2\pi + c \cdot 2\pi = 0, \quad c = -\frac{a}{2} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①④より, $f(x) = (\cos x - 1)(a \cos x - c) = a(\cos x - 1) \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)$

よって, $f(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の解は, $x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$ となる。

[解説]

微積分の計算問題です。計算量は多めです。

5

問題のページへ

(1) $C : x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - a) = 0$ より,

$$(x-t)^2 + (y-t)^2 = 2t^2 - at + 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①が円を表す条件 $2t^2 - at + 4 > 0$ が、すべての t に対して成立するためには、

$$D = a^2 - 32 < 0, \quad -4\sqrt{2} < a < 4\sqrt{2}$$

(2) $a = 4$ のとき, $C : x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 4) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

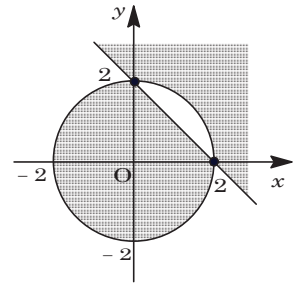
t が $t > 0$ の範囲を動くとき, C が通過する領域は, ②を t の方程式としてみたとき, $t > 0$ の解をもつ条件として表される。

まず, $2x + 2y - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ のとき, $t > 0$ の解をもつのは, $x^2 + y^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$ の場合だけである。ここで, ③④を連立することにより $(x, y) = (2, 0), (0, 2)$ となり, C はこの点を通過する。

次に, $2x + 2y - 4 \neq 0$ のときは, $t = \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 4}$ となり,

$$\frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 4} > 0, \quad (x^2 + y^2 - 4)(x + y - 2) > 0$$

よって, C が通過する領域は右図の網点部となる。ただし, 点 $(2, 0), (0, 2)$ 以外の境界は含まない。



(3) $a = 6$ のとき, $C : x^2 + y^2 - 4 - t(2x + 2y - 6) = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$

⑤が円を表す条件は, (1)より $2t^2 - 6t + 4 > 0$ すなわち $(t-1)(t-2) > 0$ であり, $t > 0$ と合わせて, $0 < t < 1, 2 < t \cdots \cdots (*)$ となる。

まず, $2x + 2y - 6 = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$ のとき, $t > 0$ の解をもつのは, $x^2 + y^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$ の場合だけである。ここで, ⑥より $y = -x + 3$ となり, ⑦に代入すると,

$$x^2 + (-x + 3)^2 - 4 = 0, \quad 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

しかし, $D/4 = -1$ より実数解をもたず, 不適である。

次に, $2x + 2y - 6 \neq 0$ のときは, $t = \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 6}$ となり,

(*)より,

$$0 < \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 6} < 1 \cdots \cdots \textcircled{8}, \quad 2 < \frac{x^2 + y^2 - 4}{2x + 2y - 6} \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑧の左側の不等式は,

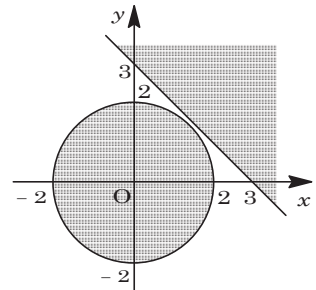
$$(x^2 + y^2 - 4)(x + y - 3) > 0 \cdots \cdots \textcircled{10}$$

不等式⑩を図示すると, 右上図の網点部となる。ただし, 境界は含まない。

⑧の右側の不等式は, $(x^2 + y^2 - 4)(2x + 2y - 6) < (2x + 2y - 6)^2$

$$2(x + y - 3)(x^2 + y^2 - 4 - 2x - 2y + 6) < 0$$

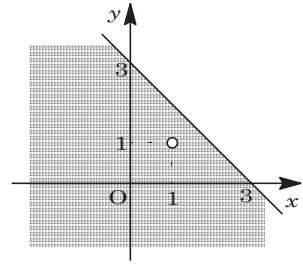
$$(x + y - 3)\{(x-1)^2 + (y-1)^2\} < 0 \cdots \cdots \textcircled{11}$$



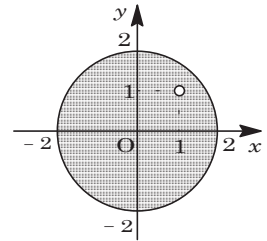
すると、 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ から、不等式⑩は、

$$(x, y) \neq (1, 1) \text{ かつ } x+y-3 < 0$$

よって、図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は含まない。



まとめると、不等式⑧は、不等式⑩と⑪を連立したものである。その共通部分を領域として図示すると、右下図の網点部となる。ただし、境界および点(1, 1)は含まない。



さらに、⑨を変形すると、

$$(x^2 + y^2 - 4)(2x + 2y - 6) > 2(2x + 2y - 6)^2$$

$$2(x + y - 3)(x^2 + y^2 - 4 - 4x - 4y + 12) > 0$$

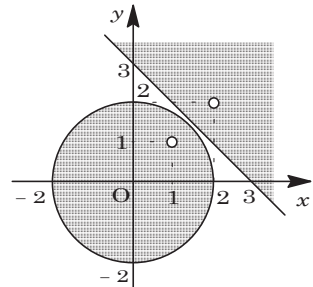
$$(x + y - 3)\{(x - 2)^2 + (y - 2)^2\} > 0 \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

すると、 $(x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 0$ から、不等式⑫は、

$$(x, y) \neq (2, 2) \text{ かつ } x+y-3 > 0$$

したがって、不等式⑨は、直線 $x + y - 3 = 0$ の上側から、点(2, 2)を除いた領域を表す。

以上より、C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので、図示すると右図の網点部となる。



ただし、境界線および2点(1, 1), (2, 2)は含まない。

[解説]

記述量が多い問題です。ステップを1つずつ踏んで図示していただくのですが、かなりの計算力と忍耐力が要求されます。