1

解答解説のページへ

1 から 7 までの番号が書かれた 7 枚のカードがある。この中から 4 枚のカードを同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和から，取り出されなかった 3 枚のカードに書かれた 3 個の数の和を引いた値を X とする。

(1) $X=-8$ となる確率を求めよ。

(2) X が負となる確率を求めよ。

(3) X の期待値を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

x の関数 $f(x)=\int_{x-2}^{x+2}|y(y-5)|\,dy$ の $2\leqq x$ における最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

e を自然対数の底とし，$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log_e|x|+\dfrac{3}{4}$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　直線 l は曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする。l の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

媒介変数表示 $x=\cos\theta$， $y=\cos^2\theta\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\left(ただし，0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が表す曲線を C とする。

(1) y を最大にする θ の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和を Y, 取り出されなかったカードに書かれた 3 個の数の和を Z とおくと,

$$Y+Z=1+2+3+4+5+6+7\ ,\ Y+Z=28$$

条件より, $X=Y-Z=(28-Z)-Z=28-2Z$

さて, 7 枚のカードから, 取り出されない 3 枚のカードを選ぶ場合は ${}_7\mathrm{C}_3$ 通りあり, これらは同様に確からしい。

ここで, $X=28-2Z=-8$ のとき, $Z=18$ となり, 取り出されなかったカードに書かれた 3 個の数は $(5,\ 6,\ 7)$ のみである。

よって, $X=-8$ となる確率は $\dfrac{1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{35}$ となる。

(2) $1+2+3\leqq Z\leqq 5+6+7$ より $6\leqq Z\leqq 18$ である。

さて, $X=28-2Z<0$ となるのは $Z>14$ より, $Z=15,\ 16,\ 17,\ 18$

(i) $Z=18$ のとき　(1)より 1 通り

(ii) $Z=17$ のとき　$(4,\ 6,\ 7)$ より 1 通り

(iii) $Z=16$ のとき　$(3,\ 6,\ 7)$, $(4,\ 5,\ 7)$ より 2 通り

(iv) $Z=15$ のとき　$(2,\ 6,\ 7)$, $(3,\ 5,\ 7)$, $(4,\ 5,\ 6)$ より 3 通り

よって, $X<0$ となる確率は, $\dfrac{1+1+2+3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{5}$ となる。

(3) X の期待値を $E(X)$ と表すと,

$$E(X)=E(28-2Z)=28-2E(Z)$$

さて, 取り出されない 3 枚のカードに書かれた数の和の期待値 $E(Z)$ は,

$$E(Z)=(1+2+3+4+5+6+7)\times\frac{1}{7}\times 3=12$$

よって, $E(X)=28-2\times 12=4$

［解 説］

取り出されたカードよりは, 取り出されなかったカードに注目した方が簡単です。また, (3)ではすべての事象を網羅する代わりに, 範囲外ですが, 数 C 範囲の知識を利用しました。

2

問題のページへ

(1)　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき，$n-1$，$n+1$ は連続する偶数となり, 一方は 4 の倍数, もう一方は 4 の倍数でない偶数である。

よって，n^2-1 は 8 の倍数である。

(2)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ より，$n-1$，n，$n+1$ は連続する 3 つの整数なので, いずれか 1 つは 3 の倍数である。

よって，n^5-n は 3 の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)$

$$=(n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2)+5\}$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

これより，$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$ は連続する 5 つの整数なので, いずれか 1 つは 5 の倍数である。また，$5(n-1)n(n+1)$ は 5 の倍数である。

よって，n^5-n は 5 の倍数となる。

そこで, (1)から $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$ は 8 の倍数, (2)から n^5-n は 3 の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より，n^5-n は $8\times3\times5=120$ の倍数となる。

［解 説］

(3)では, n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし, 記述量が多くなるため, (2)をヒントに式変形を考えたのが上の解です。

3

問題のページへ

$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}|y(y-5)|dy$ $(x\geqq 2)$に対して，

(i)　$2\leqq x<3$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}-y(y-5)\,dy=\int_{x-2}^{x+2}(-y^2+5y)\,dy=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{x+2}$$
$$=-\frac{1}{3}\left\{(x+2)^3-(x-2)^3\right\}+\frac{5}{2}\left\{(x+2)^2-(x-2)^2\right\}$$
$$=-4x^2+20x-\frac{16}{3}=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{59}{3}$$

これより，最小値は $f(2)=\dfrac{56}{3}$ となる。

(ii)　$3\leqq x<7$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{5}-y(y-5)\,dy+\int_{5}^{x+2}y(y-5)\,dy$$
$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{5}+\left[\frac{y^3}{3}-\frac{5}{2}y^2\right]_{5}^{x+2}$$

ここで，$\left[-\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{5}=-\dfrac{1}{3}\left\{125-(x-2)^3\right\}+\dfrac{5}{2}\left\{25-(x-2)^2\right\}$

$\left[\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{5}{2}y^2\right]_{5}^{x+2}=\dfrac{1}{3}\left\{(x+2)^3-125\right\}-\dfrac{5}{2}\left\{(x+2)^2-25\right\}$

よって，$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+8x+\dfrac{65}{3}$

$f'(x)=2x^2-10x+8=2(x-1)(x-4)$

右表より，最小値は $f(4)=\dfrac{49}{3}$ となる。

x	3	$\cdots$	4	$\cdots$	7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

(iii)　$7\leqq x$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}y(y-5)\,dy=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{59}{3}$$

これより，最小値は $f(7)=\dfrac{184}{3}$ となる。

(i)〜(iii)より，$f(x)$ は連続関数なので，その最小値は $f(4)=\dfrac{49}{3}$ である。

［解 説］

絶対値のついた関数を積分する頻出問題です。ミスなく計算するだけですが，計算量は多めです。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log|x|+\dfrac{3}{4}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{x^2+1}{2x}$

さて，接点の x 座標を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくとき，接線の傾きはそれぞれ $f'(\alpha)$，$f'(\beta)$ なので, 2 接線が互いに垂直である条件は,

$$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\cdot\frac{\beta^2+1}{2\beta}=-1$$

これより，$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=-4\alpha\beta$，$\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1+4\alpha\beta=0$

$$(\alpha\beta+1)^2+(\alpha+\beta)^2=0$$

すると，$\alpha\beta+1=0$ かつ $\alpha+\beta=0$ より，$\alpha=-1$，$\beta=1$ となる。

$\alpha=-1$ のとき，$f'(-1)=-1$，$f(-1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=-(x+1),\quad y=-x$$

$\beta=1$ のとき，$f'(1)=1$，$f(1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=x-1,\quad y=x$$

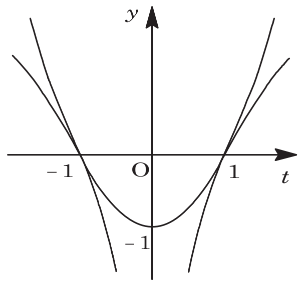
(2)　接点を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

原点を通ることより，$-f(t)=f'(t)(-t)$

$$-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\log|t|-\frac{3}{4}=\frac{t^2+1}{2t}\cdot(-t)$$

$$t^2+2\log|t|+3=2(t^2+1)$$

$$t^2-1=2\log|t|\cdots\cdots\cdots(*)$$



すると，右図より，$(*)$の解は $t=\pm1$ となり，(1)から傾きが正となる接線 l の方程式は $y=x$ である。

(3)　$f''(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ より，$x>0$ において，曲線 $y=f(x)$ の概形は右図のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	＋		＋
$f''(x)$	×	−	0	＋
$f(x)$	×	↗	1	↗

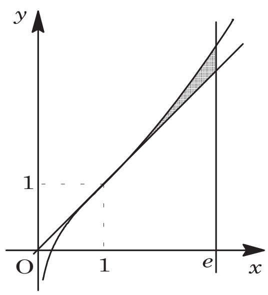
すると，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}-x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}(x\log x-x)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{12}(e^3-1)+\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}(e-1)-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{4}e+\frac{1}{6}$$



[解 説]

(1)で，α，β の値が求まるだろうかという懸念は杞憂に過ぎませんでした。

5

問題のページへ

(1)　$y=\cos^2\theta\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta(-\sin\theta)\tan\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(-4\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)=-\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}(2\sin^2\theta-\cos\theta)$$
$$=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}(2\cos^2\theta+\cos\theta-2)$$

ここで，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$2\cos^2\theta+\cos\theta-2=0$ より，

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

ここで，$\cos\theta_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ とおくと，右表より $\theta=\theta_1$ のとき y は最大となる。

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

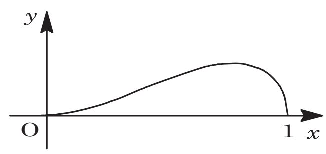
よって，$\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ である。

(2)　$x=\cos\theta$ より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$

よって，曲線 C の概形は右下図のようになり，曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	
x	1	$\searrow$	0

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\tan\frac{\theta}{2}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(1-\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$$



[解 説]

微積分の出題が 3 題続きます。内容は標準的なパラメータ積分ですが，計算量はかなりのものです。