1

解答解説のページへ

座標平面上に点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$ をとる。線分 AB 上に点 P をとり, P から x 軸に下ろした垂線を PH, A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし, また P は A と異なるものとする。O を原点とし△OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき, 通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$　解答解説のページへ

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 12 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X は平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。

4

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とし，また実数 $a,\ b$ について $g(x)=e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ においてつねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つために $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$y=g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3)　(2)で定めた $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$ と $y=f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

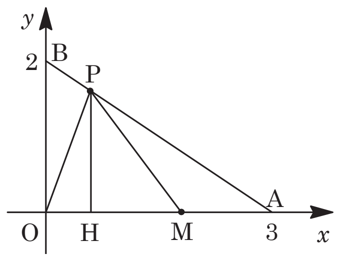
次の問いに答えよ。

(1) 置換 $x=\tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ を求めよ。

(2) $t>1$ に対して，$g(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ と定める。$t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束するような正の実数 $a,\ b$ を求めよ。

1

問題のページへ



線分 AB 上の点 P を, $0 \leqq t < 1$ として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3t,\ 2(1-t))$$

すると, $\mathrm{P}(3t,\ 2(1-t))$, $\mathrm{H}(3t,\ 0)$, $\mathrm{M}\left(\frac{3t+3}{2},\ 0\right)$

となり, これより,

$$\mathrm{OP}^2 = (3t)^2 + 4(1-t)^2 = 13t^2 - 8t + 4$$

$$\mathrm{OM}^2 = \frac{9}{4}(t+1)^2$$

さて, △OPM を O を中心に回転したときにできる円の面積を S とすると,

(i)　$13t^2 - 8t + 4 \geqq \frac{9}{4}(t+1)^2$　$\left(0 \leqq t \leqq \frac{7}{43}\right)$のとき

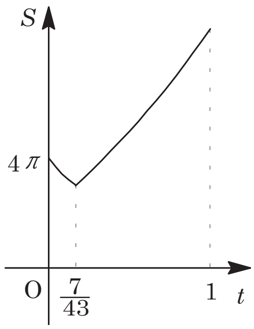
このとき, $\mathrm{OP}^2 \geqq \mathrm{OM}^2$ より,

$$S = \pi\,\mathrm{OP}^2 = \pi(13t^2 - 8t + 4) = \pi\left\{13\left(t - \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{36}{13}\right\}$$

(ii)　$13t^2 - 8t + 4 \leqq \frac{9}{4}(t+1)^2$　$\left(\frac{7}{43} \leqq t < 1\right)$のとき

このとき, $\mathrm{OP}^2 \leqq \mathrm{OM}^2$ より,

$$S = \pi\,\mathrm{OM}^2 = \frac{9}{4}\pi(t+1)^2$$



(i)(ii)より, S の値の変化は右図のようになる。

よって, $t = \frac{7}{43}$ のとき S は最小となり, このとき P の座標は, $\left(\frac{21}{43},\ \frac{72}{43}\right)$である。

[解 説]

円の半径は OP または OM となりますが, この大小関係に注目して場合分けをするところがポイントです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1}$$

ここで，$0 \leqq l \leqq k-1$ とすると，$n(k-l) \leqq k(n-l)$ より，$\dfrac{n-l}{k-l} \geqq \dfrac{n}{k}$ となり，

$$\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

さらに，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ から，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

(2)　(1)より，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$ なので，二項定理を利用すると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = 2^n$$

よって，$\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$

(3)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ なので，二項定理を利用すると，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$$

［解 説］

3 題構成の並列型の設問の場合，(1)と(2)が独立で，ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが，本問では，(1)が，独立な(2)と(3)への誘導となっており，変わった構図です。なお，内容は二項定理の応用として，著名なものです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　まず，9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りが同様に確からしいとし，事象 E の起こる確率を $P(E)$ とおく。

さて，X が 5 の倍数になる事象を A とすると，$P(\overline{A})=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{9}$ から，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　X が 3 の倍数になる事象を B，4 の倍数になる事象を C とすると，X が 12 の倍数になる事象は $B\cap C$ となり，まず $P(\overline{B})=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{42}$ である。

また，X が 4 の倍数にならないのは，奇数のカード 4 枚を取り出す場合か，2 または 6 のカードと奇数のカード 3 枚を取り出す場合のいずれかより，

$$P(\overline{C})=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{25}{126}$$

さらに，X が 3 の倍数にも 4 の倍数にもならないのは，1，2，5，7 のカードを取り出す場合のみより，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{126}$ となり，

$$P(B\cap C)=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(\overline{B})-P(\overline{C})+P(\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=1-\frac{5}{42}-\frac{25}{126}+\frac{1}{126}=\frac{29}{42}$$

(3)　5 と 7 については，平方数 X の約数となる可能性がないので，それ以外の数について，次のようにカードの数の集合を設定する。

$$S=\{1,\ 4,\ 9\},\ T=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$$

まず，集合 S から 3 枚，集合 T から 1 枚取り出す場合，集合 T のみから 4 枚取り出す場合は，X は平方数にはならない。そこで，X が平方数になるのは，

(i)　集合 S から 1 枚，集合 T から 3 枚取り出す場合
　集合 T からは，$(2,\ 3,\ 6)$，$(3,\ 6,\ 8)$ を取り出す 2 通りの場合がある。

(ii)　集合 S から 2 枚，集合 T から 2 枚取り出す場合
　集合 T からは，$(2,\ 8)$ を取り出す 1 通りのみである。

(i)(ii)より，X が平方数になる確率は，

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times 2}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times 1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{14}$$

［解 説］

確率の頻出問題です。(1)と(2)は文系に類題が出ています。(3)は，闇雲に列挙しようとすると，数えもれが発生しそうです。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=e^{-ax+b}$ に対し，$x>0$ において，

$$f(x)\geqq g(x) \iff \frac{1}{x}\geqq e^{-ax+b} \iff \log\frac{1}{x}\geqq -ax+b \iff \log x\leqq ax-b$$

ここで，$h(x)=ax-b-\log x$ とおくと，$h'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$

(i)　$a>0$ のとき

$h(x)$ の増減は右表のようになり，$x>0$ で，つねに $h(x)\geqq 0$ の条件は，

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{a}$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$h\left(\frac{1}{a}\right)=1-b+\log a\geqq 0$$

(ii)　$a\leqq 0$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$ となることから，不適である。

(i)(ii)より，求める条件は, $a>0$ かつ $1-b+\log a\geqq 0$ である。

(2)　(1)より，$h(x)=\log f(x)-\log g(x)=ax-b-\log x$ であり，

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=a-\frac{1}{x}$$

さて，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが，$x=1$ で接することより，

$f(1)=g(1)$ ………①，$f'(1)=g'(1)$ ………②

①より，$h(1)=\log f(1)-\log g(1)=a-b=0$ ………③

②より，$h'(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}-\dfrac{g'(1)}{g(1)}=a-1=0$ ………④

③④より，$a=b=1$ となり，$g_1(x)=e^{-x+1}$

また，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが，$x=2$ で接することより，

$f(2)=g(2)$ ………⑤，$f'(2)=g'(2)$ ………⑥

⑤より，$h(2)=\log f(2)-\log g(2)=2a-b-\log 2=0$ ………⑦

⑥より，$h'(2)=\dfrac{f'(2)}{f(2)}-\dfrac{g'(2)}{g(2)}=a-\dfrac{1}{2}=0$ ………⑧

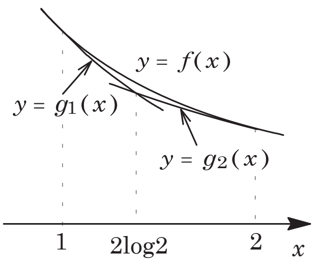
⑦⑧より，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1-\log 2$ となり，$g_2(x)=e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}$

ここで，$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ のグラフの交点は，$e^{-x+1}=e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}$ から，

$$-x+1=-\frac{1}{2}x+1-\log 2,\quad x=2\log 2$$

$$y=g_1(2\log 2)=e^{-2\log 2+1}=e^{\log\frac{e}{4}}=\frac{e}{4}$$

よって，交点の座標は $\left(2\log 2,\ \dfrac{e}{4}\right)$ である。



(3)　$\log e<\log 4<\log e^2$ から，$1<2\log 2<2$ である。

すると，$g_1(x)$，$g_2(x)$ は(1)の条件を満たしており，3 曲線 $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$，$y=f(x)$ で囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_1^{2\log 2}\left(\frac{1}{x}-e^{-x+1}\right)dx+\int_{2\log 2}^{2}\left(\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}\right)dx$$

$$=\Big[\ \log x+e^{-x+1}\ \Big]_1^{2\log 2}+\Big[\ \log x+2e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}\ \Big]_{2\log 2}^{2}$$

$$=\log(2\log 2)+e^{-2\log 2+1}-1+\log 2-\log(2\log 2)+2e^{-\log 2}-2e^{-2\log 2+1}$$

$$=e^{\log\frac{e}{4}}-1+\log 2+2e^{\log\frac{1}{2}}-2e^{\log\frac{e}{4}}=\frac{e}{4}-1+\log 2+1-\frac{e}{2}$$

$$=\log 2-\frac{e}{4}$$

［解 説］

計算を見通しよくするために，(1)と(2)は，対数関数のグラフと直線の関係としてとらえています。それでも，量的にはかなりあります。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$x=\tan^3\theta$ より，$\dfrac{dx}{d\theta}=3\tan^2\theta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}=3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)$

さて，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ では，$x=1\to3\sqrt{3}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{3}$ となるので，

$$\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\tan^2\theta}-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)\cdot3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)}{\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)}d\theta=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta$$

$$=3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

(2)　(1)と同様に $x=\tan^3\theta$ とし，$t>1$ に対して $t=\tan^3\varphi\ \left(\dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$g(t)=\int_1^t\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\tan^2\theta\,d\theta=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta=3\Big[\tan\theta-\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}$$

$$=3\tan\varphi-3\varphi-3+\frac{3}{4}\pi=3t^{\frac{1}{3}}-3\varphi-3+\frac{3}{4}\pi$$

すると，$g(t)-at^b=3t^{\frac{1}{3}}-at^b-3\varphi-3+\dfrac{3}{4}\pi=t^{\frac{1}{3}}(3-at^{b-\frac{1}{3}})-3\varphi-3+\dfrac{3}{4}\pi$

ここで，$t\to\infty$ のとき $\varphi\to\dfrac{\pi}{2}$ より，$g(t)-at^b$ が収束する必要条件は，

$$\lim_{t\to\infty}(3-at^{b-\frac{1}{3}})=0,\quad a\lim_{t\to\infty}t^{b-\frac{1}{3}}=3\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$b>\dfrac{1}{3}$ のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^{b-\frac{1}{3}}=\infty$，$0<b<\dfrac{1}{3}$ のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^{b-\frac{1}{3}}=0$ となり，ともに(*)に適さない。ところが，$b=\dfrac{1}{3}$ のとき，(*)は $a=3$ で満たされる。

逆に，このとき $g(t)-at^b=-3\varphi-3+\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$t\to\infty$ のとき明らかに収束するので，求める正の実数 a, b は，$a=3$，$b=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

誘導付きの定積分の計算問題です。問題文に $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の指定はありませんが，これは，自分で設定するということでしょう。