1

解答解説のページへ

1 辺の長さが 2 の正六角形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$を考える。さいころを 3 回投げ, 出た目を順に i, j, k とするとき，$\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし, i, j, k の中に互いに等しい数があるときは, 得点は 0 であるとする。

(1) 得点が 0 となる確率を求めよ。

(2) 得点が 27 となる確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは$\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，$\triangle$ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{\, (x,\ \ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax + b \,\}$$

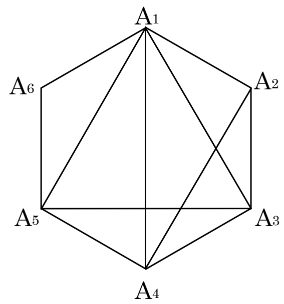
とし, D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で, x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a = 0$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき, D に含まれる格子点の個数は, a, b の値によらず一定であることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　さいころを 3 回投げて出た目 i, j, k の組は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい。

さて，得点が 0 でないのは，i，j，k がすべて異なるときであり，その確率は，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3} = \frac{5}{9}$$

よって，得点が 0 となる確率は，$1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ である。

(2)　得点を X とおき，$X = n$ のときの確率を $P(n)$ で表すと，$X \neq 0$ であるのは，次の 3 種類である。

(i)　$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ が 3 辺の長さ 2，2，$2\sqrt{3}$ の二等辺三角形の場合

$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$，$\triangle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$，$\triangle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$，$\triangle \mathrm{A}_4\mathrm{A}_5\mathrm{A}_6$，$\triangle \mathrm{A}_5\mathrm{A}_6\mathrm{A}_1$，$\triangle \mathrm{A}_6\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の場合が対応し，

$$X = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2 = 3,\ P(3) = \frac{6 \times 3!}{6^3} = \frac{1}{6}$$

(ii)　$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ が 3 辺の長さ 2，$2\sqrt{3}$，4 の直角三角形の場合

長さ 4 の斜辺は $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_5$，$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_6$ の 3 種類あり，それぞれに対して，もう 1 つの頂点は 4 通りずつ決まることより，

$$X = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}\right)^2 = 12,\ P(12) = \frac{3 \times 4 \times 3!}{6^3} = \frac{1}{3}$$

(iii)　$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ が辺の長さ $2\sqrt{3}$ の正三角形の場合

$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_5$，$\triangle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_6$ の場合が対応し，

$$X = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\pi\right)^2 = 27,\ P(27) = \frac{2 \times 3!}{6^3} = \frac{1}{18}$$

(i)～(iii)より，得点が 27 となる確率は，$\frac{1}{18}$ である。

(3)　X の期待値を $E(X)$ とおくと，(1), (2)から，

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{3} + 27 \times \frac{1}{18} = 6$$

［解　説］

正六角形を題材とした確率の基本題です。ケアレスミスを防ぐために，すべての場合の確率の和が 1 となっていることの確認が必要です。

2

問題のページへ

$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とし，$\triangle\mathrm{ABC}$の面積をSとおくと，条件より，

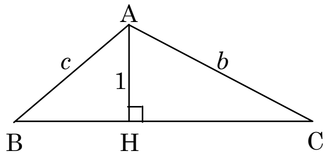
$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}b\cdots\cdots②,\ S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot 2=c\cdots\cdots③$$

①②③より，$\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=c$となり，$a=2c\cdots\cdots④$，$b=\sqrt{2}c\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$a>b>c$すなわち$\angle\mathrm{A}$が最大角となる。

すると，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の足Hは，辺BC上にあるので，$\mathrm{BH}+\mathrm{CH}=a$から，

$$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{b^2-1}=a$$



④⑤を代入して，$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{2c^2-1}=2c$，$\sqrt{2c^2-1}=2c-\sqrt{c^2-1}$

ここで，$2c>c>\sqrt{c^2-1}$から，$2c-\sqrt{c^2-1}>0$となり，

$$2c^2-1=4c^2-4c\sqrt{c^2-1}+c^2-1,\ 4\sqrt{c^2-1}=3c$$

これより，$16(c^2-1)=9c^2$となり，$c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$である。

よって，③から，$S=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$の内接円の半径をrとおくと，③④⑤より，

$$\frac{1}{2}(2c+\sqrt{2}c+c)r=c,\ r=\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2}{7}(3-\sqrt{2})$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$の外接円の半径をRとおき，$\sin B=\dfrac{1}{c}$から，⑤と合わせると，

$$2R=\frac{\sqrt{2}c}{\sin B}=\sqrt{2}c^2=\frac{16}{7}\sqrt{2},\ R=\frac{8}{7}\sqrt{2}$$

［解 説］

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。上の解では，③に注目して，cの値を求めることを最優先としたものです。ただ，rの値を求めるときには不要でしたが。

3

問題のページへ

関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ に対して,

$$f(x)=x^2-a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2a\quad(x\geqq 2)$$

$$f(x)=x^2+a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-2a\quad(x\leqq 2)$$

(i)　$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(a\geqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，$2a>-2a$ から，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(ii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ $(a\leqq -4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ となり，$f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(-4\leqq a\leqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，

$$4+\frac{a^2}{4}-(-2a)=\frac{1}{4}(a+4)^2\geqq 0,\quad 4+\frac{a^2}{4}\geqq -2a$$

よって，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(i)～(iii)より，$f(x)$ の最小値は，$a\leqq -4$ のとき $4+\dfrac{a^2}{4}$，$a\geqq -4$ のとき $-2a$ である。

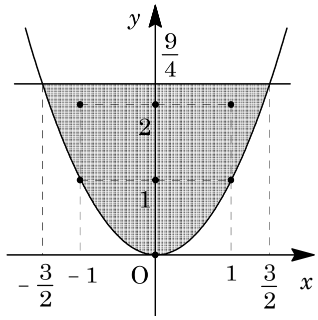
［解 説］

放物線の軸 $x=\dfrac{a}{2}$ が $x\geqq 2$ の範囲に入っているかどうか，また $x=-\dfrac{a}{2}$ が $x\leqq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお，$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ のときは, a の値が存在しないので，記述を省きました。

4

問題のページへ

(1)　$a=0$ のとき，$D: x^2 \leqq y \leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより, D の面積は,

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (b-x^2)\,dx = \frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3 = \frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3 = \frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2 \leqq y \leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は,

$$x^2-ax-b=0,\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと, D の面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3$$

条件より，$\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\frac{a-3}{2}$，$\beta=\frac{a+3}{2}$ である。

さて, a, b は整数なので, (＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると, D に含まれる格子点の個数は，$\frac{a-3}{2}=\alpha \leqq x \leqq \beta = \frac{a+3}{2}$ において,

(i)　$x=\frac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより, 1 個である。

(ii)　$x=\frac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\frac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\frac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\frac{a+3}{2}$ のとき　格子点は $(\beta,\ \beta^2)$ のみより, 1 個である。

(i)～(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

［解　説］

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。