1

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2 \leqq y \leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。

2

解答解説のページへ

数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$　　解答解説のページへ

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 P$\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 Q$\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が，3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$

(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$3^n = k^3 + 1$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

(2)　$3^n = k^2 - 40$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件(P)を考える。

(P)　正の実数 r を十分小さく選べば，$|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つ。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　実数 a が条件(P)を満たし，かつ，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)=0$ であることを証明せよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} |x|-x & (x<1 \text{のとき}) \\ |x^2-6x+8| & (x \geqq 1 \text{のとき}) \end{cases}$$

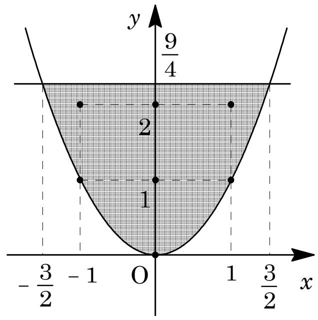
で定義されているとき，条件(P)を満たすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3)　一般に，実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の命題は正しいか。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ。

(命題)　すべての実数 a が条件(P)を満たすならば，$f(x)$ は定数関数である。

1　　問題のページへ

(1)　$a=0$ のとき，$D: x^2 \leqq y \leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより, D の面積は,

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3=\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は, $(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2 \leqq y \leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は,

$$x^2-ax-b=0,\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと, D の面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3$$

条件より，$\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\frac{a-3}{2}$，$\beta=\frac{a+3}{2}$ である。

さて, a, b は整数なので, (＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると, D に含まれる格子点の個数は，$\frac{a-3}{2}=\alpha \leqq x \leqq \beta=\frac{a+3}{2}$ において,

(i)　$x=\frac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより, 1 個である。

(ii)　$x=\frac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\frac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\frac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\frac{a+3}{2}$ のとき　格子点は $(\beta,\ \beta^2)$ のみより, 1 個である。

(i)〜(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

［解　説］

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　サイコロを振って奇数の目，偶数の目の出る確率は，それぞれ$\dfrac{1}{2}$ずつである。

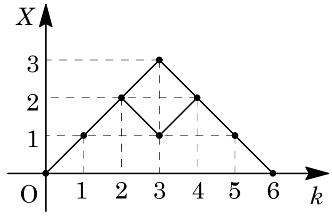
さて，$X(10)=0$であるのは，10 回の試行のうち，奇数の目が 5 回，偶数の目が 5 回出るときであり，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$

(2)　まず，$X(1)=1$のとき，条件を満たすのは，

$$X(2)=2,\ X(4)=2,\ X(5)=1,\ X(6)=0$$

すると，$X(3)=1$または$X(3)=3$であるので，その確率は，$2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{1}{32}$となる。



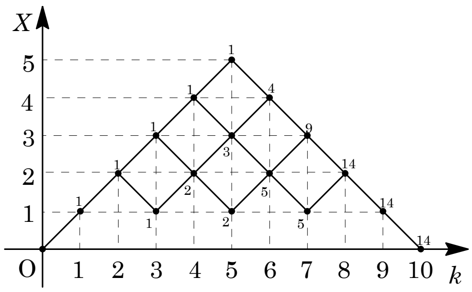
また，$X(1)=-1$のとき，同様に考えると，条件を満たす確率は$\dfrac{1}{32}$となる。

よって，2 つの場合を合わせると，求める確率は，$\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{16}$

(3)　まず，$X(1)=1$のとき，条件を満たすのは，(2)と同じく，$X(2)=2$で，

$$X(8)=2,\ X(9)=1,\ X(10)=0$$

すると，試行回数と移動した点の座標の関係を表した右図から経路の数を数えると，14 通りの場合がある。これより，その確率は，$14\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\dfrac{7}{512}$となる。



また，$X(1)=-1$のとき，同様に考えると，条件を満たす確率は$\dfrac{7}{512}$となる。

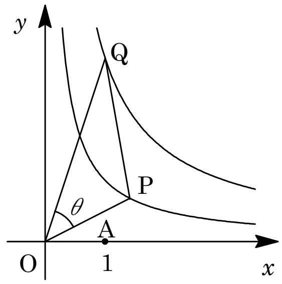
よって，2 つの場合を合わせると，求める確率は，$\dfrac{7}{512}+\dfrac{7}{512}=\dfrac{7}{256}$

［解 説］

(3)では，図に書き込んであるように，経路の交差点で足し算をして，経路数を数えています。この方法がいちばん確実でしょう。

3

問題のページへ



$P\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$Q\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$に対して，$\angle AOP=\alpha$，$\angle AOQ=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ となる。

条件より，$\alpha<\beta$ なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\cdots\cdots\cdots①$$

さて，△OPQ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle POQ=\theta$ とおくと，$\theta=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のときに成立する。

よって，$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$ から，$a=16$ である。

［解 説］

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

4

問題のページへ

(1)　$3^n = k^3 + 1$ より，$3^n = (k+1)(k^2-k+1)$ ………①

ここで，$(k^2-k+1)-(k+1) = k(k-2)$ から, $k \geqq 3$ において，$k^2-k+1 > k+1$

(i)　$k=1$ のとき　①より $3^n = 2$ となり，正の整数 n は存在しない。

(ii)　$k=2$ のとき　①より $3^n = 9$ となり，$n=2$ である。

(iii)　$k \geqq 3$ のとき　①より, l を 2 以上の整数として,

$$k+1 = 3^l \text{ ………②},\quad k^2-k+1 = 3^{n-l} \text{ ………③}$$

さらに，$n-l > l$ から $l < \dfrac{n}{2}$ となり，$2 \leqq l < \dfrac{n}{2}$ である。

②から，$k = 3^l - 1$ となり，③に代入すると，$(3^l-1)^2 - (3^l-1) + 1 = 3^{n-l}$

$$3^{2l} - 3^{l+1} + 3 = 3^{n-l},\quad 3^{2l-1} - 3^l + 1 = 3^{n-l-1} \text{ ………④}$$

ここで，$2l-1 \geqq 3$，$n-l-1 = n-2l+l-1 > 1$ となり，④は左辺が 3 の倍数ではなく右辺が 3 の倍数となるので，成立しない。

(i)(ii)(iii)より，①を満たす正の整数の組は，$(k,\ n) = (2,\ 2)$ である。

(2)　まず，3^n を 10 で割った余りは，n が奇数のとき 3 または 7，n が偶数のとき 1 または 9 である。また，k^2 を 10 で割った余りは, 0, 1, 4, 5, 6, 9 のいずれかである。

さて，$3^n = k^2 - 40$ ……⑤より，両辺を 10 で割った余りが等しくなるのは，n が偶数のときであり, m を自然数として $n = 2m$ とおくと，⑤から,

$$3^{2m} - k^2 = -40,\quad (3^m+k)(3^m-k) = -2^3 \times 5 \text{ ………⑥}$$

$3^m + k > 0 > 3^m - k$ であり，3^m+k と 3^m-k は偶奇が一致することより，

(i)　$(3^m+k,\ 3^m-k) = (2,\ -20)$ のとき　$3^m = -9$ となり，不適である。

(ii)　$(3^m+k,\ 3^m-k) = (4,\ -10)$ のとき　$3^m = -3$ となり，不適である。

(iii)　$(3^m+k,\ 3^m-k) = (10,\ -4)$ のとき

$3^m = 3$ から $m=1$，$k=7$ となる。このとき，$n=2$ である。

(iv)　$(3^m+k,\ 3^m-k) = (20,\ -2)$ のとき

$3^m = 9$ から $m=2$，$k=11$ となる。このとき，$n=4$ である。

(i)～(iv)より，⑤を満たす正の整数の組は，$(k,\ n) = (7,\ 2),\ (11,\ 4)$ である。

［解　説］

(1)は右辺の因数分解が糸口になっていますが, (2)はそれができません。いろいろ失敗を重ねた後の解答例です。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であることより,

$$f'(a)=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ここで, 条件(P)より, $\displaystyle\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqq 0$

よって, $f'(a)\geqq 0$ かつ $f'(a)\leqq 0$ より, $f'(a)=0$ である。

(2)　条件より, 関数 $f(x)$ は次のように定義される。

(i-i)　$x<0$ のとき　$f(x)=-x-x=-2x$

(i-ii)　$0\leqq x<1$ のとき　$f(x)=x-x=0$

(ii-i)　$1\leqq x<2$ のとき

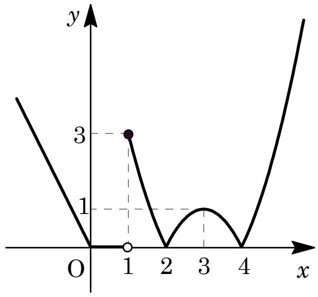
$f(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$

(ii-ii)　$2\leqq x<4$ のとき

$f(x)=-(x^2-6x+8)=-(x-3)^2+1$

(ii-iii)　$x\geqq 4$ のとき

$f(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$



以上より, $y=f(x)$ のグラフをかくと, 右上図のようになる。ただし, 黒丸の端点は含み, 白丸の端点は含まない。

これより, 条件(P)を満たすような実数 a の範囲は, $0<a\leqq 1$, $a=3$ である。

(3)　命題「すべての実数 a が条件(P)を満たすならば, $f(x)$ は定数関数である」は正しくない。

反例は, x を超えない最大整数を $[x]$ とおくと, $f(x)=[x]$ である。

[解 説]

(2)の $f(x)$ が不連続関数となっており, それが誘導だろうと推測して, (3)の反例を提示しました。