1

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

とし, D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で, x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a=0$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) $a,\ b$ がともに整数であるとき, D に含まれる格子点の個数は, $a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。

2

解答解説のページへ

数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，$\cdots$，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，$\cdots$，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

△ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形で，t は正の実数とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。直線 AB, AC 上にそれぞれ点 D，E があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ を満たしている。正三角形△ADE の重心を G，線分 BE の中点を M とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を計算せよ。

(2)　t が正の実数全体を動くとき，△CGM の面積を最小にする t の値と，そのときの面積を求めよ。

4　　解答解説のページへ

$a,\ b$ は実数とする。関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

を満たし，かつ $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である。このとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$ を最小にする $a,\ b$ の値と，その最小値を求めよ。

$\boxed{5}$　解答解説のページへ

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が, 3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$

(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

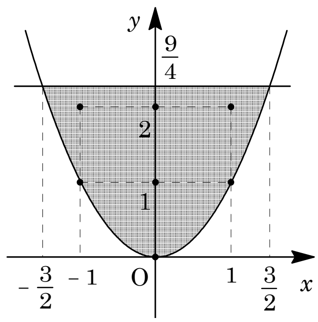
(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$a=0$ のとき，$D: x^2 \leqq y \leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより, D の面積は,

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} (b-x^2)\,dx = \frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3 = \frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3 = \frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は, $(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2 \leqq y \leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は,

$$x^2-ax-b=0\,,\ \ x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと, D の面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3$$

条件より，$\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3 = \frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\frac{a-3}{2}$，$\beta=\frac{a+3}{2}$ である。

さて, a, b は整数なので, (＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると, D に含まれる格子点の個数は，$\frac{a-3}{2}=\alpha \leqq x \leqq \beta = \frac{a+3}{2}$ において,

(i)　$x=\frac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより, 1 個である。

(ii)　$x=\frac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\frac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1 = \frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\frac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1 = \frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\frac{a+3}{2}$ のとき　格子点は $(\beta,\ \beta^2)$ のみより, 1 個である。

(i)～(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

［解　説］

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

© 電送数学舎 2010

2

問題のページへ

(1)　サイコロを振って奇数の目，偶数の目の出る確率は，それぞれ$\dfrac{1}{2}$ずつである。

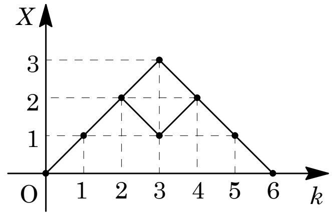
さて，$X(10)=0$であるのは，10回の試行のうち，奇数の目が5回，偶数の目が5回出るときであり，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$

(2)　まず，$X(1)=1$のとき，条件を満たすのは，

$$X(2)=2,\ X(4)=2,\ X(5)=1,\ X(6)=0$$

すると，$X(3)=1$または$X(3)=3$であるので，その確率は，$2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{1}{32}$となる。



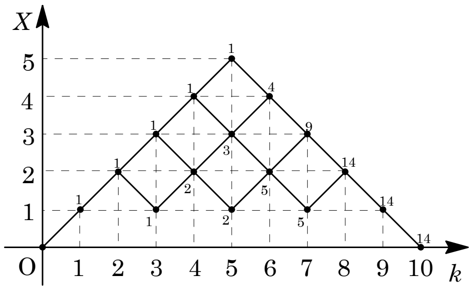
また，$X(1)=-1$のとき，同様に考えると，条件を満たす確率は$\dfrac{1}{32}$となる。

よって，2つの場合を合わせると，求める確率は，$\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{16}$

(3)　まず，$X(1)=1$のとき，条件を満たすのは，(2)と同じく，$X(2)=2$で，

$$X(8)=2,\ X(9)=1,\ X(10)=0$$

すると，試行回数と移動した点の座標の関係を表した右図から経路の数を数えると，14通りの場合がある。これより，その確率は，$14\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\dfrac{7}{512}$となる。



また，$X(1)=-1$のとき，同様に考えると，条件を満たす確率は$\dfrac{7}{512}$となる。

よって，2つの場合を合わせると，求める確率は，$\dfrac{7}{512}+\dfrac{7}{512}=\dfrac{7}{256}$

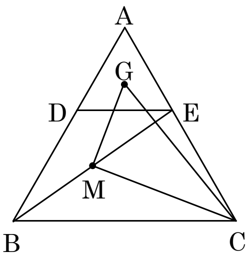
［解　説］

(3)では，図に書き込んであるように，経路の交差点で足し算をして，経路数を数えています。この方法がいちばん確実でしょう。

© 電送数学舎 2010

3

問題のページへ



(1)　条件から，$|\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$ ………①

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{c}-\frac{\vec{b}+t\vec{c}}{2}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}(2-t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{t\vec{b}+t\vec{c}}{3}-\frac{\vec{b}+t\vec{c}}{2}=\frac{1}{6}(2t-3)\vec{b}-\frac{1}{6}t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=-\frac{1}{12}(2t-3)|\vec{b}|^2+\frac{1}{12}\{(2t-3)(2-t)+t\}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{12}t(2-t)|\vec{c}|^2$$

①②より，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=-\frac{1}{12}(2t-3)+\frac{1}{12}(-t^2+4t-3)-\frac{1}{12}(2t-t^2)=0$

(2)　①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}(2-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}(2-t)^2|\vec{c}|^2$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(2-t)+\frac{1}{4}(2-t)^2=\frac{1}{4}(t^2-3t+3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|^2=\frac{1}{36}(2t-3)^2|\vec{b}|^2-\frac{1}{18}t(2t-3)\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{36}t^2|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{36}(2t-3)^2-\frac{1}{36}t(2t-3)+\frac{1}{36}t^2=\frac{1}{12}(t^2-3t+3)$$

(1)より, MC と MG は直交するので，△CGM の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{t^2-3t+3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{t^2-3t+3}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2-3t+3)=\frac{1}{8\sqrt{3}}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}$$

よって，$t=\frac{3}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{1}{8\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{32}$ をとる。

［解 説］

見かけはベクトルの応用問題ですが，実際は，ただひたすら計算に専念です。

© 電送数学舎 2010

4

問題のページへ

$f(x)=a\sin x+b\cos x+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ に対し，$c=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ とおくと，

$$f(x)=a\sin x+b\cos x+c$$

すると，$c=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t+b\cos t+c)\cos t\,dt$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(a\cdot\frac{\sin 2t}{2}+b\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}+c\cos t\right)dt=\frac{b}{2}\cdot 2\pi=\pi b$$

よって，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\pi b$

ここで，$a=b=0$ のときは，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値が 2π という条件に反するので，$a^2+b^2\neq 0$ から，

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+\pi b\quad\left(\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ より，$-\pi+\alpha\leqq x+\alpha\leqq\pi+\alpha$ となり，$f(x)$ の最大値が 2π から，

$$\sqrt{a^2+b^2}+\pi b=2\pi,\ a^2+b^2=\pi^2(2-b)^2\quad(b\leqq 2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\{f(x)\}^2=(a\sin x+b\cos x+\pi b)^2$

$$=a^2\sin^2x+b^2\cos^2x+\pi^2b^2+2ab\sin x\cos x+2\pi b^2\cos x+2\pi ab\sin x$$

$$=a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\pi^2b^2+ab\sin 2x+2\pi b^2\cos x+2\pi ab\sin x$$

そこで，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における周期性に注意すると，(*)から，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=2\pi\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\pi^2b^2\right)=\pi(a^2+b^2+2\pi^2b^2)$$

$$=\pi^3(4-4b+b^2+2b^2)=\pi^3(3b^2-4b+4)$$

$$=\pi^3\left\{3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}$$

すると，$b\leqq 2$ から，$b=\frac{2}{3}$ のとき最小となり，このとき，(*)から，$a^2=\frac{4}{9}(4\pi^2-1)$ すなわち $a=\pm\frac{2}{3}\sqrt{4\pi^2-1}$ である。

よって，$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ の最小値は $\frac{8}{3}\pi^3$ である。

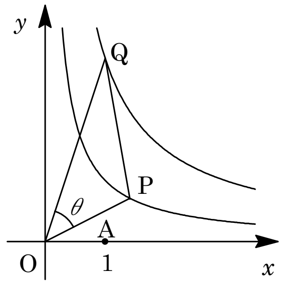
［解 説］

前問と同じく，計算あるのみです。三角関数の周期性に注目すると，積分計算はほとんど必要ありません。

© 電送数学舎 2010

5

問題のページへ



$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$, $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$となる。

条件より，$\alpha<\beta$なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\ ap^2-q^2>0\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\triangle\mathrm{OPQ}$の面積をSとすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$とおくと，$\theta=\beta-\alpha$から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$すなわち$pq=\sqrt{a}$のときに成立する。

よって，$\tan\theta$の最大値は$\dfrac{3}{\sqrt{a}}$となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$から，$a=16$である。

［解　説］

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立するp，qの値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

© 電送数学舎 2010