

1

解答解説のページへ

r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) があり、その頂点を反時計まわりに A_n, B_n, C_n, D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i) 正方形 R_0 の頂点は $A_0(0, 0), B_0(1, 0), C_0(1, 1), D_0(0, 1)$ である。

(ii) $A_{n+1} = C_n$ で、点 D_{n+1} は辺 $C_n D_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A_2, A_3, A_4 の座標を r を用いて表せ。
- (2) A_{4n} の座標を (x_n, y_n) ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) とおく。 $x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を r, n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を r を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

- (1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。
- (2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。
- (3) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

$f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく。ただし, $\log x$ は x の

自然対数を表す。

- (1) $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。
- (2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n \right\}$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$k+1$ 個 ($k \geq 1$) の部屋 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から、その部屋以外の部屋を等しい確率 $\frac{1}{k}$ で 1 つ選び、そこへ移動する。最初、部屋 A_0 にいた千葉君が、 n 回 ($n \geq 1$) 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

a, b, c は実数とし, $f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもち, $\alpha + \beta = -(a+1)$, $\alpha\beta = \frac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
- (2) a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

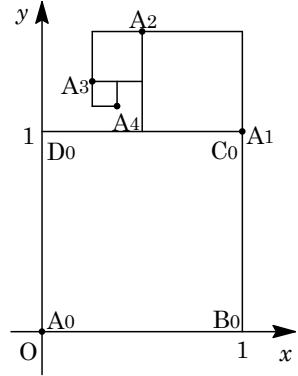
- (1) 条件を図示すると, $\overrightarrow{A_0A_1} = (1, 1)$, $\overrightarrow{A_1A_2} = r(-1, 1)$,
 $\overrightarrow{A_2A_3} = r^2(-1, -1)$, $\overrightarrow{A_3A_4} = r^3(1, -1)$ となるので,

$$\overrightarrow{A_0A_2} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = (1-r, 1+r)$$

$$\overrightarrow{A_0A_3} = \overrightarrow{A_0A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = (1-r-r^2, 1+r-r^2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0A_4} &= \overrightarrow{A_0A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} \\ &= (1-r-r^2+r^3, 1+r-r^2-r^3) \end{aligned}$$

よって, $A_2(1-r, 1+r)$, $A_3(1-r-r^2, 1+r-r^2)$,
 $A_4(1-r-r^2+r^3, 1+r-r^2-r^3)$ である。



- (2) $A_{4n}(x_n, y_n)$ とおくととき, (1) と同様にして,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_{4n+4}} - \overrightarrow{OA_{4n}} &= \overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}} + \overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}} + \overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}} + \overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}} \\ &= (r^4)^n \overrightarrow{A_0A_1} + (r^4)^n \overrightarrow{A_1A_2} + (r^4)^n \overrightarrow{A_2A_3} + (r^4)^n \overrightarrow{A_3A_4} \\ &= r^{4n} (\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4}) = r^{4n} \overrightarrow{A_0A_4} \end{aligned}$$

よって, $x_{n+1} - x_n = r^{4n}(1-r-r^2+r^3)$, $y_{n+1} - y_n = r^{4n}(1+r-r^2-r^3)$

- (3) $p = 1-r-r^2+r^3 = (1-r)^2(1+r)$, $q = 1+r-r^2-r^3 = (1+r)^2(1-r)$ とおく。

すると, (2) より, $n \geq 1$ において,

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} pr^{4k} = p \sum_{k=0}^{n-1} r^{4k}, \quad y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} qr^{4k} = q \sum_{k=0}^{n-1} r^{4k}$$

ここで, $0 < r < 1$ から, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^{4k} = \frac{1}{1-r^4} = \frac{1}{(1+r)(1-r)(1+r^2)}$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{p}{1-r^4} = \frac{1-r}{1+r^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{q}{1-r^4} = \frac{1+r}{1+r^2}$$

[解説]

回転の行列を利用して, 一般的に解くこともできますが, 設問(2)を見て, (1)を延長した解答例を記しています。

2

問題のページへ

$$(1) \text{ G は } \triangle ABC \text{ の重心より, } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件から, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ なので, ①に代入すると,

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\text{ここで, 辺 BC の中点を M とおくと, } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ から, } \overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

となり, $\triangle ABC$ の外心 O は M と一致する。

したがって, $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形である。

$$(2) \text{ 条件から, } \overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA} \text{ なので, ①に代入すると,}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (3k - 1)\overrightarrow{OA}$$

ここで, ②から, $\overrightarrow{OM} = \frac{3k-1}{2}\overrightarrow{OA}$ となり, $k \neq \frac{1}{3}$ より, 3点 O, A, M は同一直線

上にある。一方, O は $\triangle ABC$ の外心なので, 辺 BC の垂直二等分線上にあり, $OM \perp BC$ である。

したがって, $AM \perp BC$ となるので, $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形である。

$$(3) \text{ まず, } O \text{ と } M \text{ が一致しないとき, (2)より, } OM \perp BC \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, 条件より, $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ なので, $\overrightarrow{OI} = \vec{0}$ または $OI \perp BC$ である。

$$(i) \overrightarrow{OI} = \vec{0} \text{ のとき}$$

O と I が一致し, ③より, $IM \perp BC$ である。

$$(ii) OI \perp BC \text{ のとき}$$

③より, O, I, M は同一直線上にあり, $IM \perp BC$ である。

(i)(ii)より, $IM \perp BC$ である。

次に, O と M が一致するとき, $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ から $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ となり, $\overrightarrow{MI} \neq \vec{0}$ なので, $IM \perp BC$ である。

よって, いずれの場合も $IM \perp BC$ であり, これより $IB = IC$ となり,

$$\angle IBC = \angle ICB, \quad 2\angle IBC = 2\angle ICB, \quad \angle ABC = \angle ACB$$

したがって, $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。

[解説]

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。なお, (2)までは文理共通です。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ より, 部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \end{aligned}$$

ここで, $x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$ より,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(2) $h(x) = f(x) - g(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \log(1+x^2)$ とおくと,

$$h'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$h''(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

すると, $x > 0$ において, $h''(x) > 0$ より, $h'(x) > h'(0) = 0$ となり,

$$h(x) > h(0) = 0$$

すなわち, $f(x) > g(x)$ である。

(3) $S_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(k^2 + n^2) \right) - 2 \log n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log n^2 \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\} \right) - 2 \log n$ とおくと,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log n^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\} - 2 \log n \\ &= \frac{1}{n} \cdot 2n \log n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\} - 2 \log n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \int_0^1 \log(x^2 + 1) dx = \left[x \log(x^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= \log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \log 2 - 2 \int_0^1 dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \log 2 + \frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$

[解説]

解き終われば, 3つの設問の関連はあまりないことがわかります。ただ, 解き進めているときには, (3)と(2)の関係について, 迷いが生じます。

4

問題のページへ

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと、最初、部屋 A_0 にいたので、 $p_1 = \frac{1}{k}$ である。

また、 $n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは、 n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて、 A_1 を $\frac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より、

$$p_{n+1} = \frac{1}{k}(1-p_n), \quad p_{n+1} = -\frac{1}{k}p_n + \frac{1}{k} \cdots \cdots (*)$$

(*)を変形すると、 $p_{n+1} - \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{k}\left(p_n - \frac{1}{k+1}\right)$ となり、

$$p_n - \frac{1}{k+1} = \left(p_1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1} = \frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1} = -\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k}\right)^n$$

よって、 $p_n = \frac{1}{k+1}\left\{1 - \left(-\frac{1}{k}\right)^n\right\}$ である。

[解説]

最初の移動で場合分けをし、隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ、そのプロセスで(*)が導かれ、考え直したのが、上の解答例です。

5

問題のページへ

- (1) 実数 α, β に対し, $\alpha + \beta = -(a+1)$, $\alpha\beta = \frac{1}{a}$ を満たす 2 次方程式は,

$$x^2 + (a+1)x + \frac{1}{a} = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

さて, $f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$ に対して, 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもつことより, k を定数として,

$$x^4 + bx^2 + cx + 2 = \left\{ x^2 + (a+1)x + \frac{1}{a} \right\} (x^2 + kx + 2a) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②の両辺の係数を比較すると, $k + a + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$$2a + k(a+1) + \frac{1}{a} = b \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad 2a(a+1) + \frac{k}{a} = c \cdots \cdots \textcircled{5}$$

③より, $k = -a - 1$ となり, ④⑤に代入すると,

$$b = 2a - (a+1)^2 + \frac{1}{a} = -a^2 + \frac{1}{a} - 1 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$c = 2a(a+1) - \frac{a+1}{a} = 2a^2 + 2a - \frac{1}{a} - 1 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

- (2) ①は異なる 2 つの実数解をもつことより,

$$D = (a+1)^2 - \frac{4}{a} = \frac{a^3 + 2a^2 + a - 4}{a} = \frac{(a-1)(a^2 + 3a + 4)}{a} > 0$$

すると, $a^2 + 3a + 4 > 0$ より, $a < 0, 1 < a \cdots \cdots \textcircled{8}$

また, ②③から, $x^2 - (a+1)x + 2a = 0$ は 2 つの虚数解をもつことより,

$$D = (a+1)^2 - 8a = a^2 - 6a + 1 < 0$$

よって, $3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{9}$

以上より, ⑧⑨をともに満たす a の範囲は, $1 < a < 3 + 2\sqrt{2}$

- (3) $g(a) = -a^2 + \frac{1}{a} - 1$ とおくと, ⑥より, $b = g(a)$ となり, $1 < a < 3 + 2\sqrt{2}$ で,

$$g'(a) = -2a - \frac{1}{a^2} < 0$$

よって, $g(a)$ は単調に減少し, $g(3 + 2\sqrt{2}) < g(a) < g(1)$

すると, $g(3 + 2\sqrt{2}) = -15 - 14\sqrt{2}$, $g(1) = -1$ から, b のとり得る値の範囲は,

$$-15 - 14\sqrt{2} < b < -1$$

[解説]

高次方程式についての基本問題です。(1)では, 最初, $f(x)$ を $x^2 + (a+1)x + \frac{1}{a}$ で割ろうとしましたが, 係数が複雑になりすぎると予測し, 方針転換をして恒等式②で計算を進めました。