1

解答解説のページへ

さいころを 7 回投げ, k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$p,\ q$ を互いに素な 2 以上の整数，$m,\ n$ は $m<n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。

$\boxed{3}$　解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式

$$(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0,\ \ y(y+5)\leqq 0$$

の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 積X_1X_2が 18 より大となるのは，$X_1 = X_2$のとき$(X_1,\ X_2) = (5,\ 5)$，$(6,\ 6)$である。また，$X_1 < X_2$のとき$(X_1,\ X_2) = (4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 6)$，$X_1 > X_2$のときも同様になる。

よって，積X_1X_2が 18 以下である確率は，$1 - \dfrac{2+3\cdot 2}{6^2} = \dfrac{7}{9}$である。

(2) 積$X_1X_2\cdots X_7$が奇数である確率は$\left(\dfrac{3}{6}\right)^7 = \dfrac{1}{128}$から，偶数である確率は,

$$1 - \frac{1}{128} = \frac{127}{128}$$

(3) 積$X_1X_2\cdots X_7$が 4 の倍数でない偶数であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_7のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より，その確率は，${}_7\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^6 = \dfrac{7}{192}$である。

よって，積$X_1X_2\cdots X_7$が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$\frac{127}{128} - \frac{7}{192} = \frac{367}{384}$$

(4) さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれR_0，R_1，R_2とおくと，いずれの場合も起こる確率は$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$である。

ここで，自然数を 3 で割った余りについて，2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると，積$X_1X_2\cdots X_7$を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_7のうち，R_1が 7 回，またはR_1が 5 回でR_2が 2 回，またはR_1が 3 回でR_2が 4 回，またはR_1が 1 回でR_2が 6 回という 4 通りの場合があり，その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 + {}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_7\mathrm{C}_6\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = 64\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{64}{2187}$$

［解 説］

確率の頻出問題です。(4)は，積がR_1となるのは，R_0が 0 回で，R_2が 0 または偶数回という意味です。

2

問題のページへ

互いに素な 2 以上の整数 p, q に対して，分母が p^2q^2 である分数で，0 より大きく 1 以下の数は，

$$\frac{1}{p^2q^2},\ \frac{2}{p^2q^2},\ \frac{3}{p^2q^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{p^2q^2-1}{p^2q^2},\ \frac{p^2q^2}{p^2q^2}$$

この分数の中で，分子が p の倍数であるものは $\frac{p}{p^2q^2}$, $\frac{2p}{p^2q^2}$ $\cdots$, $\frac{p^2q^2}{p^2q^2}$ より pq^2 個，分子が q の倍数であるものは $\frac{q}{p^2q^2}$, $\frac{2q}{p^2q^2}$ $\cdots$, $\frac{p^2q^2}{p^2q^2}$ より p^2q 個，また分子が pq の倍数であるものは $\frac{pq}{p^2q^2}$, $\frac{2pq}{p^2q^2}$ $\cdots$, $\frac{p^2q^2}{p^2q^2}$ より pq 個ある。

すると，分子が p でも q でも割り切れない分数の個数は，

$$p^2q^2-(pq^2+p^2q-pq)=pq(pq-p-q+1)=pq(p-1)(q-1)$$

よって，正の整数 m, $n\,(m<n)$ に対して，m よりも大きく n よりも小さく，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数の総数は，$pq(p-1)(q-1)(n-m)$ である。

［解 説］

0 より大きく 1 以下の分数について調べた後，m より大きく $m+1$ 以下の数，$m+1$ より大きく $m+2$ 以下の数，…と同様に考えています。

3

問題のページへ

(1)　$y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l_a の方程式は，

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2 \cdots\cdots\text{①}$$

直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ ……②の表す領域に含まれることより，①を②に代入して，

$$2ax-a^2>-x^2+2x-5,\ \ x^2+2(a-1)x-a^2+5>0 \cdots\cdots\text{③}$$

③が任意の x に対して成立することより，

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)=2(a^2-a-2)<0$$

すると，$(a-2)(a+1)<0$ より，$-1<a<2$ である。

(2)　直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ は，①より，$a^2-2xa+y=0$ が $-1<a<2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで，$f(a)=a^2-2xa+y=(a-x)^2-x^2+y$ とおくと，

(i)　$x\leqq-1$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\geqq0$ より，$y\geqq-2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\leqq0$ より，$y\leqq4x-4$

(ii)　$-1<x<2$ のとき

(a)　$f(x)=-x^2+y>0$ より，$y>x^2$

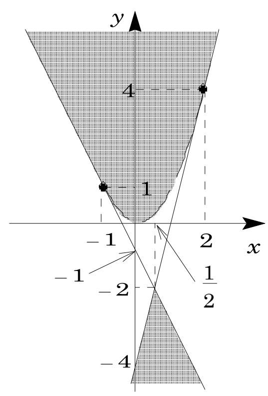
(b)　$f(-1)=1+2x+y\leqq0$，$f(2)=4-4x+y\leqq0$ より，

$y\leqq-2x-1$，$y\leqq4x-4$

(iii)　$x\geqq2$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\leqq0$ より，$y\leqq-2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\geqq0$ より，$y\geqq4x-4$



(i)〜(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D は右上図の網点部となる。

ただし，破線の境界線のみ領域に含まない。

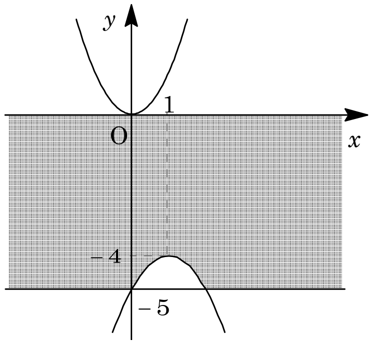
(3)　不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq0$ を変形すると，

$x^2>-x^2+2x-5$ より，

$$-x^2+2x-5\leqq y\leqq x^2 \cdots\cdots\text{④}$$

また，$y(y+5)\leqq0$ より，

$$-5\leqq y\leqq0 \cdots\cdots\text{⑤}$$



よって，連立不等式④⑤の表す領域 E は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

さて，直線 $y=-2x-1$ と放物線 $y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$-2x-1=-x^2+2x-5,\ \ x^2-4x+4=0$$

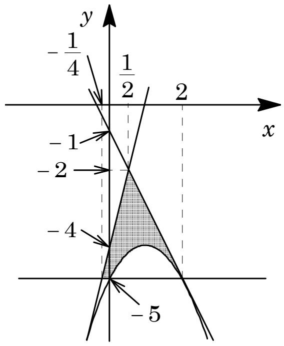
重解 $x=2$ をもつことより，$x=2$ で接する。

また，直線 $y=4x-4$ と放物線 $y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$4x-4=-x^2+2x-5,\ \ x^2+2x+1=0$$

重解 $x=-1$ をもつことより，$x=-1$ で接する。

これより，領域 D と E の共通部分を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



そこで，この共通部分の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{4}\right)(-2+5)-\int_0^2(-x^2+2x-5+5)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}-\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{27}{8}-\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{49}{24}$$

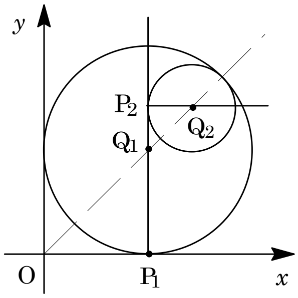
［解　説］

計算量の多い問題で，時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが，図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$0<a<1$ から，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ は，中心 $(1-a,\ 1-a)$ で半径 $\sqrt{2}a$ である。



ここで，$a=a_1$ のとき，$C(a_1)$ が x 軸と接する条件は,

$$1-a_1=\sqrt{2}a_1,\ (\sqrt{2}+1)a_1=1$$

よって，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

(2)　(1)より，$\mathrm{P}_1(2-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ となり，直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ は $x=2-\sqrt{2}$ である。

条件より，円 $C(a_2)$ は直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ と接することより,

$$\left|(1-a_2)-(2-\sqrt{2})\right|=\sqrt{2}a_2,\ \sqrt{2}-1-a_2=\pm\sqrt{2}a_2$$

(i)　$\sqrt{2}-1-a_2=\sqrt{2}a_2$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=\sqrt{2}-1$ より，$a_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

(ii)　$\sqrt{2}-1-a_2=-\sqrt{2}a_2$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_2=\sqrt{2}-1$ となり，$0<a_2<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_2=3-2\sqrt{2}$ である。

(3)　円 $C(a_n)$ は中心 $(1-a_n,\ 1-a_n)$ で半径 $\sqrt{2}a_n$ であり，直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ は $x=1-a_{n-1}$ または $y=1-a_{n-1}$ である。

条件より，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ が接するので,

$$\left|(1-a_n)-(1-a_{n-1})\right|=\sqrt{2}a_n,\ a_{n-1}-a_n=\pm\sqrt{2}a_n$$

(i)　$a_{n-1}-a_n=\sqrt{2}a_n$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=a_{n-1}$ より，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1}=(\sqrt{2}-1)a_{n-1}=a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

(1)より，$a_1=\sqrt{2}-1$ なので，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$

(ii)　$a_{n-1}-a_n=-\sqrt{2}a_n$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_n=a_{n-1}$ となり，$0<a_n<1$，$0<a_{n-1}<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$ である。

［解 説］

(3)では，n を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが，対称性から不要でした。なお，円 $C(a)$ は a の値にかかわらず定点 $(1,\ 1)$ を通ることに注目すると，場合分けが必要ありません。