1 解答解説のページへ

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

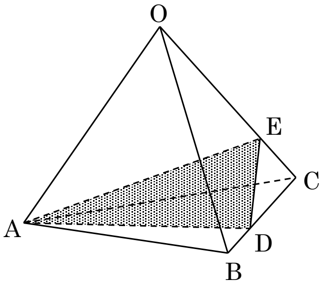
整数 p, $q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2 = 3^2 + 1^2 - 2\cdot 3\cdot 1\cdot \cos 60^\circ = 7$$

よって，$\mathrm{AD} = \sqrt{7}$ となる。

(2)　$\triangle$ACE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AE}^2 = 3^2 + t^2 - 2\cdot 3\cdot t\cdot \cos 60^\circ = t^2 - 3t + 9$$

また，$\triangle$CDE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DE}^2 = 2^2 + t^2 - 2\cdot 2\cdot t\cdot \cos 60^\circ = t^2 - 2t + 4$$

さらに，$\triangle$ADE に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{DAE} = \frac{7 + (t^2 - 3t + 9) - (t^2 - 2t + 4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{12 - t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}}$$

(3)　(2)より，$\sin\angle\mathrm{DAE} = \sqrt{1 - \dfrac{(12 - t)^2}{28(t^2 - 3t + 9)}} = \dfrac{\sqrt{27t^2 - 60t + 108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}}$

すると，$\triangle$ADE の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2 - 60t + 108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9t^2 - 20t + 36}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9\left(t - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{224}{9}}$$

よって，S は $t = \dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\dfrac{224}{9}} = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる。

［解　説］

三角比の空間図形への適用問題です。基本的な定理の確認となっています。

$\boxed{2}$　問題のページへ

(1)　9 枚のカードを無作為に 1 列に並べる $9!$ 通りが同様に確からしい。

さて，番号 1 のカードと番号 2 のカードが隣り合うのは，この 2 枚のカードの位置も考えると，$2!\times 8!$ 通りとなる。

よって，番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない確率は，

$$1-\frac{2!\times 8!}{9!}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

(2)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間の 1 枚のカードの選び方が 7 通りなので，番号 8 と番号 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがある場合は，この 2 枚のカードの位置も考えると，$7\times 2!\times 7!$ 通りとなる。すると，その確率は，

$$\frac{7\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{7}{36}$$

(3)　番号 1 と 2 のカードが隣り合わず，しかも番号 8 と 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがあるのは，番号 8 と 9 のカードの間にあるカードで場合分けをして，

(i)　番号 1 または 2 のカードがあるとき

番号 1 と 2 のカードは隣り合わないので，$2\times 2!\times 7!$ 通りとなり，この確率は，

$$\frac{2\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{1}{18}$$

(ii)　番号 3 から 7 までのカードのいずれかがあるとき

番号 3 から 7 までの 5 枚のカードのいずれかがあるのは，$5\times 2!\times 7!$ 通りとなる。この中で，番号 1 と 2 のカードが隣り合うのは，$5\times 2!\times(2!\times 6!)$ 通りより，この場合の確率は，

$$\frac{5\times 2!\times 7!}{9!}-\frac{5\times 2!\times(2!\times 6!)}{9!}=\frac{5}{36}-\frac{5}{126}=\frac{25}{252}$$

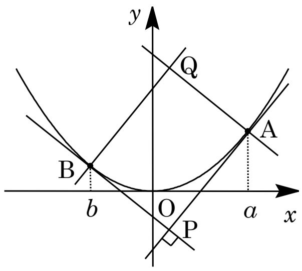
(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{18}+\dfrac{25}{252}=\dfrac{13}{84}$ である。

［解 説］

確率の基本的な問題ですが，それがかえって，数えもれなどの不安を抱え込んでしまいます。

3

問題のページへ



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\Big(a,\ \dfrac{a^2}{4}\Big)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\Big(b,\ \dfrac{b^2}{4}\Big)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\text{①}$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots$②

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\text{③}$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\Big)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\Big(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\Big)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\Big(a^2+\frac{16}{a^2}\Big)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\Big(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\Big)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\Big\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\Big\}(a-b)=\frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\Big)\Big(a+\frac{4}{a}\Big)$$

$$=\frac{1}{8}\Big(a^2+\frac{16}{a^2}+8\Big)\Big(a+\frac{4}{a}\Big)=\frac{1}{8}\Big(a+\frac{4}{a}\Big)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

［解　説］

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

4

問題のページへ

(1) $${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\Big(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\Big)=\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\Big\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}-\frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\Big\}$$
$$=\frac{n+k+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

(2) (1)の等式について，$k=2$ とすると，
$${}_{n+3}\mathrm{C}_3\times\Big(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\Big)=\frac{2}{3},\ \ \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\Big)$$
これより，m が 3 以上の整数のとき，$S=\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，
$$S=\sum_{n=0}^{m-3}\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\Big(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\Big)$$
$$=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\Big)+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\Big)+\cdots+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\Big)$$
$$=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\Big)=\frac{3}{2}\Big\{1-\frac{2}{m(m-1)}\Big\}=\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}$$

［解　説］

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。