1

解答解説のページへ

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

2

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

3　解答解説のページへ

整数 p, $q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1)　n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

r を 1 より大きい実数とする。半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる。最初に円 C の中心 P は座標平面の$(0,\ 1)$，点 Q は$(0,\ 2)$にあるものとし，円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく。角θラジアンだけ回転したとき，半直線 PQ 上に$\mathrm{PR}=r$なる点 R をとる。θを 0 から2πまで動かしたときの R の軌跡を考える。

(1)　α，βは$0\leqq\alpha<\beta\leqq 2\pi$を満たし，$\theta=\alpha$のときの R の座標と$\theta=\beta$のときの R の座標とが一致するものとする。$t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$とおくとき，$r$ を t を用いて表せ。

(2)　(1)において，θをαからβまで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする。S を t を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{S}{r^2}$を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1)　9 枚のカードを無作為に 1 列に並べる $9!$ 通りが同様に確からしい。

さて，番号 1 のカードと番号 2 のカードが隣り合うのは，この 2 枚のカードの位置も考えると，$2!\times 8!$ 通りとなる。

よって，番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない確率は，

$$1-\frac{2!\times 8!}{9!}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

(2)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間の 1 枚のカードの選び方が 7 通りなので，番号 8 と番号 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがある場合は，この 2 枚のカードの位置も考えると，$7\times 2!\times 7!$ 通りとなる。すると，その確率は，

$$\frac{7\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{7}{36}$$

(3)　番号 1 と 2 のカードが隣り合わず，しかも番号 8 と 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがあるのは，番号 8 と 9 のカードの間にあるカードで場合分けをして，

(i)　番号 1 または 2 のカードがあるとき

番号 1 と 2 のカードは隣り合わないので，$2\times 2!\times 7!$ 通りとなり，この確率は，

$$\frac{2\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{1}{18}$$

(ii)　番号 3 から 7 までのカードのいずれかがあるとき

番号 3 から 7 までの 5 枚のカードのいずれかがあるのは，$5\times 2!\times 7!$ 通りとなる。この中で，番号 1 と 2 のカードが隣り合うのは，$5\times 2!\times(2!\times 6!)$ 通りより，この場合の確率は，

$$\frac{5\times 2!\times 7!}{9!}-\frac{5\times 2!\times(2!\times 6!)}{9!}=\frac{5}{36}-\frac{5}{126}=\frac{25}{252}$$

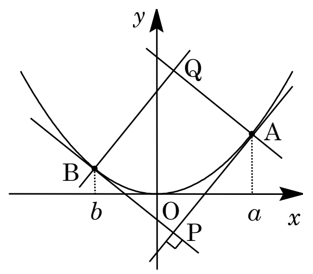
(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{18}+\dfrac{25}{252}=\dfrac{13}{84}$ である。

［解 説］

確率の基本的な問題ですが，それがかえって，数えもれなどの不安を抱え込んでしまいます。

2

問題のページへ



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

［解　説］

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

3

問題のページへ

(1) $${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)=\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\left\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}-\frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\right\}$$
$$=\frac{n+k+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

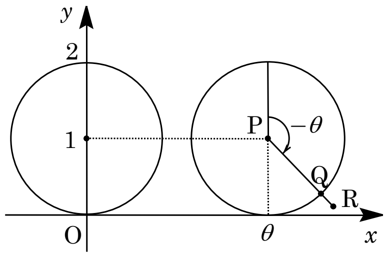
(2) (1)の等式について，$k=2$ とすると，
$${}_{n+3}\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$$
これより，m が 3 以上の整数のとき，$S=\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，
$$S=\sum_{n=0}^{m-3}\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)+\cdots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)=\frac{3}{2}\left\{1-\frac{2}{m(m-1)}\right\}=\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}$$

［解　説］

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

4

問題のページへ



(1)　円 C が x 軸に接しながら，角 θ ラジアンだけ回転したとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\theta,\ 1)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

$$=(\sin\theta,\ \cos\theta)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\theta+r\sin\theta,\ 1+r\cos\theta)$$

ここで，$0\leqq\alpha<\beta\leqq 2\pi$ のとき，条件より，

$$\alpha+r\sin\alpha=\beta+r\sin\beta\cdots\cdots\text{①},\ 1+r\cos\alpha=1+r\cos\beta\cdots\cdots\text{②}$$

②より $\cos\alpha=\cos\beta$ となり，$\beta=2\pi-\alpha$ から，$\alpha+\beta=2\pi\cdots\cdots$③

ここで，$t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ より，$\beta-\alpha=2t\cdots\cdots$④

③④より，$\alpha=\pi-t$，$\beta=\pi+t$ となり，①に代入すると，

$$\pi-t+r\sin(\pi-t)=\pi+t+r\sin(\pi+t),\ r\sin t=t$$

$(\alpha,\ \beta)=(0,\ 2\pi)$ では成立しないので，$\sin t\neq 0$ より，$r=\dfrac{t}{\sin t}\cdots\cdots$⑤

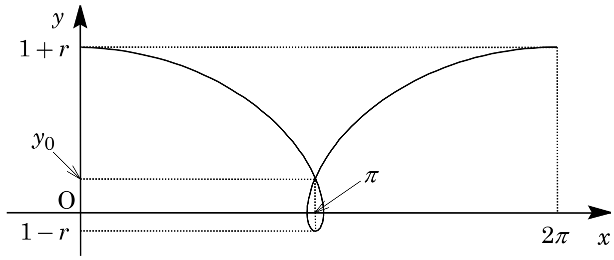
(2)　$\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると，$x=\theta+r\sin\theta$，$y=1+r\cos\theta$ となり，

$$\frac{dx}{d\theta}=1+r\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=-r\sin\theta$$

さて，$\cos\theta=-\dfrac{1}{r}$ を満たす θ を γ，γ' $(0<\gamma<\pi<\gamma'<2\pi)$ とおくと，x, y の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π	$\cdots$	γ'	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$		$\searrow$	π	$\searrow$		$\nearrow$	2π
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$1+r$	$\searrow$	0	$\searrow$	$1-r$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+r$

すると，点 R の軌跡は右図のようになる。ただし，$y_0=1+r\cos\alpha=1+r\cos\beta$ とおく。ここで，$\alpha\leqq\theta\leqq\pi$ において $x=x_1$，また $\pi\leqq\theta\leqq\beta$ において $x=x_2$ とすると，R の軌跡によって囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_{1-r}^{y_0}x_1\,dy-\int_{1-r}^{y_0}x_2\,dy$$

$$=\int_{\pi}^{\alpha}(\theta+r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta-\int_{\pi}^{\beta}(\theta+r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(\theta+r\sin\theta)(r\sin\theta)d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}(r\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta)d\theta$$

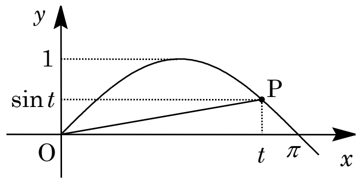
ここで，$I_1=\int_\alpha^\beta \theta\sin\theta d\theta$，$I_2=\int_\alpha^\beta \sin^2\theta d\theta$ とおくと，

$$I_1=-\big[\,\theta\cos\theta\,\big]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta\cos\theta d\theta=-\beta\cos\beta+\alpha\cos\alpha+\sin\beta-\sin\alpha$$
$$=-(\pi+t)\cos(\pi+t)+(\pi-t)\cos(\pi-t)+\sin(\pi+t)-\sin(\pi-t)$$
$$=(\pi+t)\cos t-(\pi-t)\cos t-\sin t-\sin t=2t\cos t-2\sin t$$
$$I_2=\int_\alpha^\beta\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)-\frac{1}{4}\big[\,\sin 2\theta\,\big]_\alpha^\beta$$
$$=t-\frac{1}{4}(\sin 2\beta-\sin 2\alpha)=t-\frac{1}{4}\{\sin(2\pi+2t)-\sin(2\pi-2t)\}$$
$$=t-\frac{1}{4}(\sin 2t+\sin 2t)=t-\sin t\cos t$$

よって，$S=rI_1+r^2I_2=r(2t\cos t-2\sin t)+r^2(t-\sin t\cos t)$ となり，⑤から，

$$S=\frac{t}{\sin t}(2t\cos t-2\sin t)+\frac{t^2}{\sin^2 t}(t-\sin t\cos t)=\frac{t^2\cos t}{\sin t}+\frac{t^3}{\sin^2 t}-2t$$

(3) まず，$r\to\infty$ のとき，$\frac{1}{r}=\frac{\sin t}{t}\to+0$ となる。



ここで，右図において，線分 OP の傾きが $\frac{\sin t}{t}$ であり，また $0<\frac{\beta-\alpha}{2}<\pi$ から $0<t<\pi$ であることを考え合わせると，$\frac{\sin t}{t}\to+0$ のとき $t\to\pi-0$ となり，

$$\frac{S}{r^2}=\frac{\sin^2 t}{t^2}\Big(\frac{t^2\cos t}{\sin t}+\frac{t^3}{\sin^2 t}-2t\Big)=\sin t\cos t+t-\frac{2\sin^2 t}{t}$$

よって，$\lim_{r\to\infty}\frac{S}{r^2}=\lim_{t\to\pi-0}\Big(\sin t\cos t+t-\frac{2\sin^2 t}{t}\Big)=\pi$

［解 説］

有名な問題です。たとえば「入試問題セレクション」に「積分の応用」の第 1 問として選んだ 1998 年の横浜国大の問題を参照してください。ただ，計算量はすごいものがあり，エネルギーと時間をかなり費やしてしまいます。

5

問題のページへ

整数 m に対して，$m^4+14m^2=m^2(m^2+14)$ が $2m+1$ の整数倍となるのは,

(i)　$2m+1=\pm1$ $(m=0,\ -1)$ のとき　m^4+14m^2 は $2m+1$ の整数倍である。

(ii)　$2m+1\neq\pm1$ $(m\neq0,\ m\neq-1)$ のとき

まず, m と $2m+1$ の公約数を g とおくと，m_1，m_2 を整数として,

$$m=gm_1,\ 2m+1=gm_2$$

すると，$2gm_1+1=gm_2$，$g(m_2-2m_1)=1$ から, g は 1 の約数となり，$g=\pm1$

よって, m と $2m+1$ は互いに素であり，m^2 と $2m+1$ は互いに素となる。

これより，$m^2(m^2+14)$ が $2m+1$ の整数倍になることと，m^2+14 が $2m+1$ の整数倍になることは同値である。

すると, k を整数として，$m^2+14=k(2m+1)$ から,

$$m^2-2km+14-k=0,\ m=k\pm\sqrt{k^2+k-14}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, n を 0 以上の整数とすると, m が整数より, ①から,

$$k^2+k-14=n^2,\ 4k^2+4k-56=4n^2,\ (2k+1)^2-(2n)^2=57$$

$$(2k+1+2n)(2k+1-2n)=3\times19\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$2k+1+2n\geqq2k+1-2n$ より, ②を満たす k, n は,

$$(2k+1+2n,\ 2k+1-2n)=(57,\ 1),\ (-1,\ -57),\ (19,\ 3),\ (-3,\ -19)$$

$$(k+n,\ k-n)=(28,\ 0),\ (-1,\ -29),\ (9,\ 1),\ (-2,\ -10)$$

$m\neq0,\ m\neq-1$ なので, ①より，$m=k\pm n=-29,\ -10,\ -2,\ 1,\ 9,\ 28$

(i)(ii)より，m^4+14m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m は,

$$m=-29,\ -10,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 9,\ 28$$

［解 説］

ノーヒントの整数問題です。上記のような解法をとりましたが，$2^4(m^4+14m^2)$ を考える方法もあり，この方がかなり簡単です。ただ, 気付きませんでした。