1

解答解説のページへ

1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。これらを無作為に1列に並べる試行を行う。

(1) 下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2) 下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3) 条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし, 条件(A), (B)は次のとおりである。

(A) 番号1のカードと番号2のカードは隣り合わない。

(B) 番号8のカードと番号9のカードの間には, ちょうど1枚のカードがある。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

整数 p，$q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　n，k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

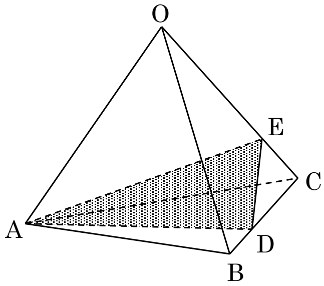
$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a は 0 でない実数とする。直線 $y=ax$ と曲線 $y=x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2 = 3^2 + 1^2 - 2\cdot 3\cdot 1\cdot \cos 60^\circ = 7$$

よって，$\mathrm{AD} = \sqrt{7}$ となる。

(2)　$\triangle$ACE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AE}^2 = 3^2 + t^2 - 2\cdot 3\cdot t\cdot \cos 60^\circ = t^2 - 3t + 9$$

また，$\triangle$CDE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DE}^2 = 2^2 + t^2 - 2\cdot 2\cdot t\cdot \cos 60^\circ = t^2 - 2t + 4$$

さらに，$\triangle$ADE に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{DAE} = \frac{7 + (t^2 - 3t + 9) - (t^2 - 2t + 4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{12 - t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}}$$

(3)　(2)より，$\sin\angle\mathrm{DAE} = \sqrt{1 - \dfrac{(12-t)^2}{28(t^2 - 3t + 9)}} = \dfrac{\sqrt{27t^2 - 60t + 108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}}$

すると，$\triangle$ADE の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2 - 60t + 108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2 - 3t + 9}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9t^2 - 20t + 36}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9\left(t - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{224}{9}}$$

よって，S は $t = \dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\dfrac{224}{9}} = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる。

［解　説］

三角比の空間図形への適用問題です。基本的な定理の確認となっています。

2

問題のページへ

(1)　9 枚のカードを無作為に 1 列に並べる $9!$ 通りが同様に確からしい。

さて，番号 1 のカードと番号 2 のカードが隣り合うのは，この 2 枚のカードの位置も考えると，$2!\times8!$ 通りとなる。

よって，番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない確率は，

$$1-\frac{2!\times8!}{9!}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

(2)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間の 1 枚のカードの選び方が 7 通りなので，番号 8 と番号 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがある場合は，この 2 枚のカードの位置も考えると，$7\times2!\times7!$ 通りとなる。すると，その確率は，

$$\frac{7\times2!\times7!}{9!}=\frac{7}{36}$$

(3)　番号 1 と 2 のカードが隣り合わず，しかも番号 8 と 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがあるのは，番号 8 と 9 のカードの間にあるカードで場合分けをして，

(i)　番号 1 または 2 のカードがあるとき

番号 1 と 2 のカードは隣り合わないので，$2\times2!\times7!$ 通りとなり，この確率は，

$$\frac{2\times2!\times7!}{9!}=\frac{1}{18}$$

(ii)　番号 3 から 7 までのカードのいずれかがあるとき

番号 3 から 7 までの 5 枚のカードのいずれかがあるのは，$5\times2!\times7!$ 通りとなる。この中で，番号 1 と 2 のカードが隣り合うのは，$5\times2!\times(2!\times6!)$ 通りより，この場合の確率は，

$$\frac{5\times2!\times7!}{9!}-\frac{5\times2!\times(2!\times6!)}{9!}=\frac{5}{36}-\frac{5}{126}=\frac{25}{252}$$

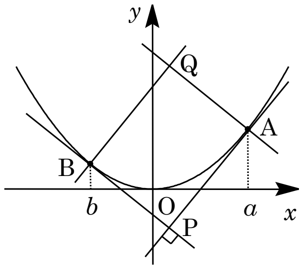
(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{18}+\dfrac{25}{252}=\dfrac{13}{84}$ である。

［解 説］

確率の基本的な問題ですが，それがかえって，数えもれなどの不安を抱え込んでしまいます。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_A，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_B の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_A と l_B が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_\mathrm{A}:y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_\mathrm{B}:y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

［解　説］

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

4

問題のページへ

(1) $${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\Big(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\Big)=\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\Big\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}-\frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\Big\}$$
$$=\frac{n+k+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

(2) (1)の等式について，$k=2$ とすると，

$${}_{n+3}\mathrm{C}_3\times\Big(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\Big)=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\Big)$$

これより，m が 3 以上の整数のとき，$S=\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，

$$S=\sum_{n=0}^{m-3}\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\Big(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\Big)$$
$$=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\Big)+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\Big)+\cdots+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\Big)$$
$$=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\Big)=\frac{3}{2}\Big\{1-\frac{2}{m(m-1)}\Big\}=\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}$$

［解　説］

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

5

問題のページへ

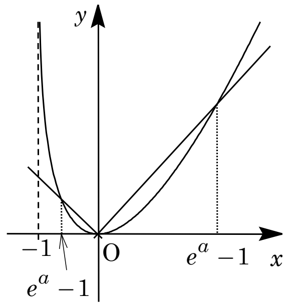
$x>-1$ のとき，曲線 $y=x\log(x+1)$ ……①に対して，$y'=\log(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

$$y''=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}>0$$

すると，曲線①は下に凸であり，また y' は単調増加し，$x=0$ のとき $y'=0$ から y の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	0	$\nearrow$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$ から，曲線①および直線 $y=ax$ ……②の関係は，右図のようになる。



ここで，①と②を連立すると，$x\log(x+1)=ax$

$$x\{\log(x+1)-a\}=0$$

よって，$x=0$，または $\log(x+1)=a$ より $x=e^a-1$

さて，曲線①と直線②で囲まれる図形の面積 S は,

(i)　$e^a-1>0$ $(a>0)$ のとき

$$S=\int_0^{e^a-1}\{ax-x\log(x+1)\}dx$$

$$=\Big[\frac{a}{2}x^2\Big]_0^{e^a-1}-\Big[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\Big]_0^{e^a-1}+\int_0^{e^a-1}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{a}{2}(e^a-1)^2-\frac{(e^a-1)^2}{2}\log e^a+\frac{1}{2}\int_0^{e^a-1}\Big(x-1+\frac{1}{x+1}\Big)dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|\Big]_0^{e^a-1}=\frac{1}{4}(e^a-1)^2-\frac{1}{2}(e^a-1)+\frac{1}{2}\log e^a$$

$$=\frac{1}{4}e^{2a}-e^a+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$$

(ii)　$e^a-1<0$ $(a<0)$ のとき

$$S=\int_{e^a-1}^{0}\{ax-x\log(x+1)\}dx=-\frac{1}{4}e^{2a}+e^a-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}$$

［解 説］

微積分の基本題です。曲線の概形が把握できれば，場合分けはあるものの計算は面倒ではありません。