1

解答解説のページへ

1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を$1:2$に内分する点を D，CA を$1:2$に内分する点を E，AB を$1:2$に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。このとき，$\triangle$PQR の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て，しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ。ただし，6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす。

3

解答解説のページへ

m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

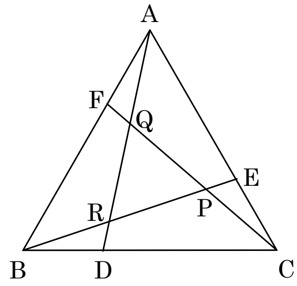
$k,\ m,\ n$ を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2)　$4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

1

問題のページへ



$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=1$

$$\mathrm{AF}:\mathrm{FB}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=1:2$$

これより，$\triangle$ABD と$\triangle$CAF は合同になり，

$$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ACF}$$

すると，$\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{DAC}+\angle\mathrm{ACF}=\angle\mathrm{DAC}+\angle\mathrm{BAD}=60^\circ$

同様に，$\angle\mathrm{QRP}=60^\circ$ となり，$\triangle$PQR は正三角形である。

ここで，$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2=1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot1\cdot\frac{1}{3}\cos60^\circ=\frac{7}{9},\ \ \mathrm{AD}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

さて，$\triangle$ABD と直線 CF についてメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QA}}=1,\ \ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QA}}=1,\ \ \frac{\mathrm{DQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\triangle$ADC と直線 BE についてメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1,\ \ \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1,\ \ \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RD}}=6\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QR}:\mathrm{RD}=\frac{3}{7}:\left(1-\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\right):\frac{1}{7}=3:3:1$ となり，

$$\mathrm{QR}=\frac{3}{7}\mathrm{AD}=\frac{3}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{28}$

［解　説］

平面図形の計量についての基本問題です。$\triangle$PQR が正三角形であるのは対称性から明らかですが，少しだけ説明を付け加えておきました。なお，記述量がやや増えるでしょうが，ベクトルを利用する解法も考えられます。

2

問題のページへ

さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回に 6 の目の出る回数で場合分けをし，確率を求めると，

(i)　初めの 4 回に 6 の目が出ず，5 回目に 6 の目が出るとき

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{5^4}{6^5}$$

(ii)　初めの 4 回に 6 の目が 2 回出るとき

(ii-i)　初めの 3 回に 6 が 1 回，4 回目に 6，5 回目に 6 が出ないとき

$${}_3C_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{3\cdot5^3}{6^5}$$

(ii-ii)　初めの 3 回に 6 が 2 回，4 回目に 6 が出ず，5 回目に 6 が出るとき

$${}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3\cdot5^2}{6^5}$$

(iii)　初めの 4 回に 6 の目が 4 回，5 回目に 6 の目が出ないとき

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6^5}$$

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{5^4}{6^5}+\frac{3\cdot5^3}{6^5}+\frac{3\cdot5^2}{6^5}+\frac{5}{6^5}=\frac{5(5^3+3\cdot5^2+3\cdot5+1)}{6^5}=\frac{5\cdot216}{6^5}=\frac{5}{36}$$

［解 説］

センター試験に出題されるような確率の基本問題です。

3

問題のページへ

方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ ……①に対して，$x^3-3x=|x-m|$ から，

$$y=x^3-3x \cdots\cdots ②,\ \ y=|x-m| \cdots\cdots ③$$

すると，①の異なる実数解の個数は，②と③のグラフの共有点の個数に一致する。

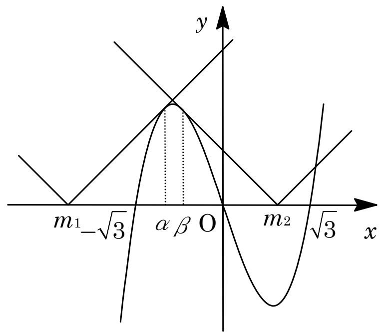
さて，②より，$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

これより，②の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

また，③は $y\geqq 0$ で，点 $(m,\ 0)$ を頂点とする折れ線で，その傾きは 1 と -1 である。

ここで，点 $(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha)$ において，②のグラフの接線の傾きが 1 になるとすると，$\alpha<0$ として，



$$3\alpha^2-3=1,\ \alpha^2=\frac{4}{3},\ \alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

すると，$\alpha^3-3\alpha=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}=\dfrac{10}{9}\sqrt{3}$ となり，

$$\alpha^3-3\alpha=\alpha-m_1$$

よって，$m_1=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-\dfrac{10}{9}\sqrt{3}=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$

また，点 $(\beta,\ \beta^3-3\beta)$ において，②のグラフの接線の傾きが -1 になるとすると，$\beta<0$ として，

$$3\beta^2-3=-1,\ \beta^2=\frac{2}{3},\ \beta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すると，$\beta^3-3\beta=\dfrac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{7}{9}\sqrt{6}$ となり，$\beta^3-3\beta=-\beta+m_2$

よって，$m_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{7}{9}\sqrt{6}=\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$

以上より，②と③のグラフの共有点の個数，すなわち方程式①の異なる実数解の個数は，右上図から，

$m<-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$，$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}<m$ のとき 1 個，$m=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$，$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 2 個

$-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}<m<\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 3 個

［解 説］

初めからグラフを用いて処理をしましたが，詰めの作業がやや煩雑です。まず，方程式①を同値変形した方がよかったかもしれません。

4

問題のページへ

(1) k を自然数, l, N を 0 以上の整数とするとき,

(i) $k=3l+1$ のとき　$2^k=2^{3l+1}=2\cdot 8^l=2(7+1)^l=2(7N+1)=7\cdot 2N+2$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 2 である。

(ii) $k=3l+2$ のとき　$2^k=2^{3l+2}=4\cdot 8^l=4(7+1)^l=4(7N+1)=7\cdot 4N+4$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 4 である。

(iii) $k=3l+3$ のとき　$2^k=2^{3l+3}=8\cdot 8^l=8(7+1)^l=8(7N+1)=7(8N+1)+1$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 1 である。

(i)～(iii)より, 2^k を 7 で割った余りが 4 のとき, k を 3 で割った余りは 2 である。

(2) m, n を自然数で, $4m+5n$ が 3 で割り切れるとき,

$$4m+5n=3(m+2n)+(m-n)$$

これより, $m-n$ は 3 で割り切れる, すなわち m を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しくなる。そこで, m', n' を 0 以上の整数として,

(i) m, n を 3 で割った余りが 1 のとき　$m=3m'+1$, $n=3n'+1$

$$mn=(3m'+1)(3n'+1)=3(3m'n'+m'+n')+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(ii) m, n を 3 で割った余りが 2 のとき　$m=3m'+2$, $n=3n'+2$

$$mn=(3m'+2)(3n'+2)=3(3m'n'+2m'+2n'+1)+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(iii) m, n を 3 で割った余りが 0 のとき　$m=3m'+3$, $n=3n'+3$

$$mn=(3m'+3)(3n'+3)=3(3m'n'+3m'+3n'+3)$$

これより, mn を 3 で割った余りは 0 である。

(i)～(iii)より, mn を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, 2 ではない。

したがって, (1)より, 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない。

［解 説］

テーマは整数の余りによる分類です。(2)の最後の行は, (1)で証明した命題の対偶を利用しています。なお, 合同式を用いて記述しても構いません。