1

解答解説のページへ

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。

2

解答解説のページへ

コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。

コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2)　$n \leqq m \leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。

3

解答解説のページへ

双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$) を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。 Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2 ， Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$， Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\,\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$，$C_2 : \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$　　解答解説のページへ

関数 $f(x)=\left|x+2\sin(x+a)+b\right|$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ での最大値と最小値の差は，定数 a，b によらずつねに π 以上で，かつ $\left(\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$b^2+4c>0$ のとき，$x^2-bx-c=0$ の実数解 α，β について，

$$\alpha+\beta=b,\ \alpha\beta=-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\cdots\cdots②$から，①と合わせて，

$$\begin{aligned}ba_{n+1}+ca_n&=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\\&=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\end{aligned}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\cdots\cdots③$が成立する。

(2)　a_n がすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これより b は整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$ となり，

$$2c=a_3-ba_2\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ bc=a_4-ba_3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から $a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$ となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3,\ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$ はすべて整数である。

さて，$2c$ が整数より，k を整数として $c=\dfrac{k}{2}$ とおくことができる。

ここで，k が奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$ が整数より b は偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$ は，分子 $(b^2+k)k$ が奇数より，整数ではない。

したがって，k は奇数ではなく偶数となり，c も整数である。

逆に，b,c がともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$ はともに整数であり，③から，帰納的に $a_n\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ はすべて整数となる。

以上より，a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。

［解 説］

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　コインを n 回続けて投げ，第 1 回目は 1 点，第 2 回目以降は前の回と異なる面が出たら 1 点，同じ面が出たら 2 点というゲームをする。

このとき，得られる得点が $2n-1$ 点の場合は，$2n-1=1+2(n-1)$ から，第 2 回目以降に第 1 回目と同じ面が出続けることより，その確率 $P_{n,\,2n-1}$ は，

$$P_{n,\,2n-1}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

また，得られる得点が $2n-2$ 点の場合は，$2n-2=1+\{1\cdot 1+2(n-2)\}$ から，第 2 回目以降に前の回と異なる面が 1 回だけ出ることより，その確率 $P_{n,\,2n-2}$ は，

$$P_{n,\,2n-2}=1\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)　得られる得点が m 点 $(n\leqq m\leqq 2n-1)$ の場合，第 2 回目以降に前の回と異なる面が k 回だけ出るとすると，

$$m=1+\{1\cdot k+2(n-1-k)\},\quad m=2n-1-k$$

すると，$k=2n-m-1$ となり，その確率 $P_{n,\,m}$ は，

$$P_{n,\,m}=1\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{2n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}=\frac{(n-1)!}{(2n-m-1)!(m-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

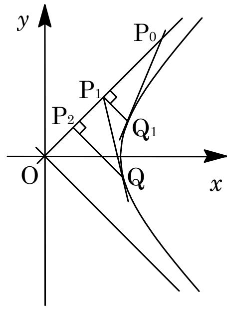
なお，この式は $n=1$ のときも満たしている。

［解　説］

反復試行の確率の問題です。一見，二重数列が現れるかとも思いましたが，その予測に反して直接的に計算できました。

3

問題のページへ



(1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{Q}_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ に対して,

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は,

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより,

$$2a_n=b_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から,

$$b_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n+\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n+\frac{1}{4a_n},\ c_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n-\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$\mathrm{Q}_n\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)$ である。

(2) 点 Q_n における①の接線は, (1)から，$\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\Big)x-\Big(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)y=1$

この接線が点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので,

$$\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}-\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}=1,\ \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$ である。

(3) $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ は $\angle\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=90^\circ$ の直角三角形であり,

$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2+\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

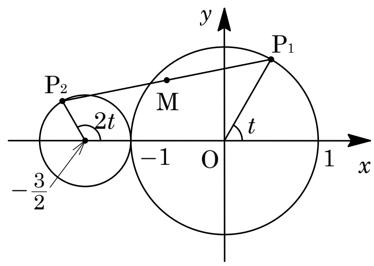
よって，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては, 計算量は少なめです。

4

問題のページへ



C_1 は原点中心で半径 1 の円，C_2 は点$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$中心で半径$\dfrac{1}{2}$の円である。このとき，時刻$t=0$から$t=2\pi$において，点$P_1$は$C_1$上を点$(1,\ 0)$から反時計まわりに一周，点$P_2$は$C_2$上を点$(-1,\ 0)$から反時計まわりに二周することから，$P_1(\cos t,\ \sin t)$

$$P_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

すると，P_1とP_2の中点$M(x,\ y)$は，

$$x=\frac{1}{2}\left(\cos t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\sin t$$

さて，$x=f(t)$，$y=g(t)$とおくと，$f(2\pi-t)=f(t)$，$g(2\pi-t)=-g(t)$

これより，点 M の軌跡について，$0\leqq t\leqq\pi$の部分と$\pi\leqq t\leqq 2\pi$の部分は x 軸について対称となる。以下，$0\leqq t\leqq\pi$の場合について，軌跡の概形を調べる。

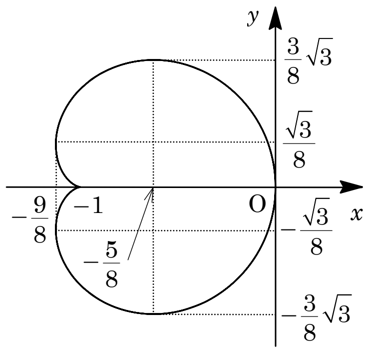
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin t=-\sin\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t=\cos\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	0	↘	$-\dfrac{5}{8}$	↘	$-\dfrac{9}{8}$	↗	-1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{8}$	↘	0

t の値の変化に伴う x, y の値の変化は右表のようになる。

さらに，この$0\leqq t\leqq\pi$における曲線を x 軸対称し，もとの曲線と合わせた曲線が，求める点 M の軌跡である。図示すると，右図のようになる。



また，M の軌跡によって囲まれる図形の面積 S は，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$の曲線部分を$y=y_1$，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$の曲線部分を$y=y_2$とおくと，

$$S=2\int_{-\frac{9}{8}}^{0}y_1\,dx-2\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}y_2\,dx$$

$$=2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}g(t)f'(t)dt-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}g(t)f'(t)dt=2\int_{\pi}^{0}g(t)f'(t)dt$$

ここで，$g(t)=\dfrac{1}{4}(\sin 2t+2\sin t)$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(\sin 2t+\sin t)$ から，

$$
\begin{aligned}
S&=2\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{8}(\sin 2t+2\sin t)(\sin 2t+\sin t)\,dt\\
&=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}(\sin^2 2t+3\sin 2t\sin t+2\sin^2 t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4t-3\cos 3t+3\cos t+2-2\cos 2t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(3-\cos 4t-3\cos 3t-2\cos 2t+3\cos t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\Big[\,3t-\frac{\sin 4t}{4}-\sin 3t-\sin 2t+3\sin t\,\Big]_{0}^{\pi}=\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

［解　説］

パラメータ曲線についての微積分です。方針は明確に決まりますが，この問題のように計算量が多いのが，その特徴です。そのため，対称性を把握して，記述量を減らすことがポイントになります。

5

問題のページへ

関数 $f(x)=\left|x+2\sin(x+a)+b\right|$ に対して，$g(x)=x+2\sin(x+a)+b$ とおき，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $g(x)$ の最大値を M，最小値を m とおく。

そして，$f(x)=\left|g(x)\right|$ の最大値と最小値の差を d とおき，次の場合を考える。

(a)　$M>m\geqq 0$ のとき　$d=M-m$

(b)　$M\geqq 0>m$ $(M\geqq|m|)$ のとき　$d=M$

(c)　$M\geqq 0>m$ $(M<|m|)$ のとき　$d=-m$

(d)　$0>M>m$ のとき　$d=M-m$

さて，$g'(x)=1+2\cos(x+a)$ から，$g'(x)=0$ すなわち $\cos(x+a)=-\dfrac{1}{2}$ となる x を $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおく。その前後で $g(x)$ の増減は右表のようになる。ただし，n は整数で，$\alpha+a=\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$，$\beta+a=\dfrac{4}{3}\pi+2n\pi$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗		↘		↗

ここで，$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$g(0)=2\sin a+b$，$g(2\pi)=2\pi+2\sin a+b$ から，

$$g(2\pi)-g(0)=2\pi \cdots\cdots\cdots ①$$

さらに，$g(x)$ は $x=\alpha$ での極大，$x=\beta$ で極小となり，その値はそれぞれ，

$$g(\alpha)=\alpha+2\sin(\alpha+a)+b=\alpha+\sqrt{3}+b$$
$$g(\beta)=\beta+2\sin(\beta+a)+b=\beta-\sqrt{3}+b$$

よって，$g(\alpha)-g(\beta)=\alpha-\beta+2\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots ②$

さて，まず(a)の場合について考えると，

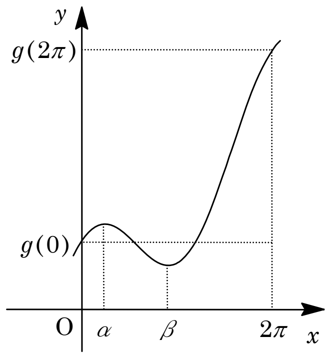
(i)　$0\leqq\alpha<\beta\leqq 2\pi$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは右図のようになり，②から，$\beta-\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ なので，$g(\alpha)-g(\beta)=-\dfrac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$

①から，$M-m\leqq 2\pi+\left(-\dfrac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)=\dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$

$$M-m\geqq 2\pi$$

また，(d)の場合も同様である。



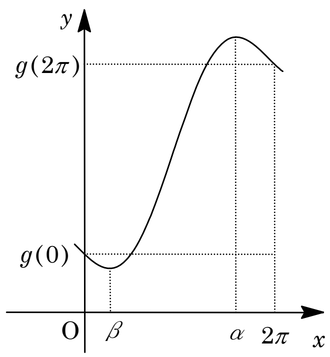
(ii)　$0\leqq\beta<\alpha\leqq 2\pi$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは右図のようになり，②から，$\alpha-\beta=\dfrac{4}{3}\pi$ なので，$g(\alpha)-g(\beta)=\dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$

①から，$M-m=\dfrac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}$

$$M-m>2\pi$$

また，(d)の場合も同様である。



次に，(b)の場合については，$0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$ のときも，$0 \leqq \beta < \alpha \leqq 2\pi$ のときも，

$$M \geqq \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi\,,\quad M < \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

また，(c)の場合も同様である。

以上より，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差 d は，

$$\pi \leqq d \leqq \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$$

［解　説］

微分と増減について，かなり難しめの問題です。解答例では，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$g(x)$ の極大点と極小点が 1 つずつ存在することに着目しています。そして，それらの点が，4 直線 $x = 0$，$x = 2\pi$，$y = g(0)$，$y = g(2\pi)$ で囲まれた正方形の外部に出ていたり，内部にあったりということを利用しています。記述がかなり雑ですが……。