1

解答解説のページへ

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。

2

解答解説のページへ

コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。

コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2)　$n \leqq m \leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。

3

解答解説のページへ

双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$) を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\,\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x)=1\ ,\ T_1(x)=x\ ,\ T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して，$\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

cを実数とし，曲線$y=x^2+c$ ……①と曲線$y=\log x$ ……②の共通接線を考える。

(1) 共通接線の本数を，実数cの値によって答えよ。

(2) 共通接線が 1 本であるとき，その接線と①，②それぞれとの接点を求めよ。

(3) 共通接線が 1 本であるとき，①，②とx軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$b^2+4c>0$ のとき，$x^2-bx-c=0$ の実数解 α，β について，

$$\alpha+\beta=b\,,\ \alpha\beta=-c\ \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\cdots\cdots②$から，①と合わせて，

$$ba_{n+1}+ca_n=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

$$=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\cdots\cdots③$が成立する。

(2)　a_n がすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これより b は整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$ となり，

$$2c=a_3-ba_2\cdots\cdots\cdots④,\ bc=a_4-ba_3\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から $a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$ となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3\,,\ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$ はすべて整数である。

さて，$2c$ が整数より，k を整数として $c=\dfrac{k}{2}$ とおくことができる。

ここで，k が奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$ が整数より b は偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$ は，分子 $(b^2+k)k$ が奇数より，整数ではない。

したがって，k は奇数ではなく偶数となり，c も整数である。

逆に，b, c がともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$ はともに整数であり，③から，帰納的に a_n $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ はすべて整数となる。

以上より，a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。

［解 説］

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

2

問題のページへ

(1)　コインを n 回続けて投げ，第 1 回目は 1 点，第 2 回目以降は前の回と異なる面が出たら 1 点，同じ面が出たら 2 点というゲームをする。

このとき，得られる得点が $2n-1$ 点の場合は，$2n-1=1+2(n-1)$ から，第 2 回目以降に第 1 回目と同じ面が出続けることより，その確率 $P_{n,2n-1}$ は，

$$P_{n,2n-1}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

また，得られる得点が $2n-2$ 点の場合は，$2n-2=1+\{1\cdot1+2(n-2)\}$ から，第 2 回目以降に前の回と異なる面が 1 回だけ出ることより，その確率 $P_{n,2n-2}$ は，

$$P_{n,2n-2}=1\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)　得られる得点が m 点 $(n\leqq m\leqq 2n-1)$ の場合，第 2 回目以降に前の回と異なる面が k 回だけ出るとすると，

$$m=1+\{1\cdot k+2(n-1-k)\},\ \ m=2n-1-k$$

すると，$k=2n-m-1$ となり，その確率 $P_{n,m}$ は，

$$P_{n,m}=1\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{2n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}=\frac{(n-1)!}{(2n-m-1)!(m-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

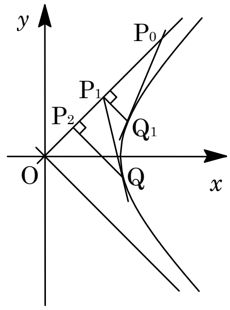
なお，この式は $n=1$ のときも満たしている。

［解 説］

反復試行の確率の問題です。一見，二重数列が現れるかとも思いましたが，その予測に反して直接的に計算できました。

3

問題のページへ



(1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $Q_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $P_n(a_n,\ a_n)$ に対して,

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は,

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $P_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより,

$$2a_n=b_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から,

$$b_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n+\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n+\frac{1}{4a_n},\ c_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n-\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$Q_n\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)$ である。

(2) 点 Q_n における①の接線は, (1)から，$\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\Big)x-\Big(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)y=1$

この接線が点 $P_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので,

$$\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}-\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}=1,\ \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$ である。

(3) $\triangle P_nQ_nP_{n-1}$ は $\angle P_{n-1}P_nQ_n=90°$ の直角三角形であり,

$$P_{n-1}P_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

$$P_nQ_n=\sqrt{\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2+\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

よって，$\triangle P_nQ_nP_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては, 計算量は少なめです。

4

問題のページへ

(1)　$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$，$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ のとき，$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ となることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=0,\ 1$ のとき

$T_0(\cos\theta)=1=\cos 0$，$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$ となり，成立している。

(ii)　$n=k,\ k+1\ (k\geqq 0)$ のとき

$T_k(\cos\theta)=\cos k\theta$，$T_{k+1}(\cos\theta)=\cos(k+1)\theta$ と仮定すると，

$$T_{k+2}(\cos\theta)=2\cos\theta T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta$$
$$=\cos(k+2)\theta+\cos k\theta-\cos k\theta=\cos(k+2)\theta=T_{k+2}(\cos\theta)$$

これより，$n=k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ となる。

(2)　$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx$ とし，$x=\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，$dx=-\sin\theta d\theta$ となり，

$$I=\int_{\pi}^{0}T_n(\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\cos n\theta\sin\theta d\theta$$

(i)　$n\geqq 2$ のとき

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\Big[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\Big]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{1}{2(n+1)}\{\cos(n+1)\pi-1\}+\frac{1}{2(n-1)}\{\cos(n-1)\pi-1\}$$
$$=-\frac{1}{2(n+1)}\{(-1)^{n+1}-1\}+\frac{1}{2(n-1)}\{(-1)^{n-1}-1\}$$
$$=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\Big)\{(-1)^{n-1}-1\}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n+1)(n-1)}$$

(ii)　$n=1$ のとき　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\theta d\theta=-\frac{1}{4}\Big[\cos 2\theta\Big]_0^{\pi}=0$

(iii)　$n=0$ のとき　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=-\Big[\cos\theta\Big]_0^{\pi}=2$

(i)～(iii)より，$I=\dfrac{-2}{(n+1)(n-1)}$　(n が偶数)，$I=0$　(n が奇数)

［解　説］

ときどき見かける漸化式ですが，内容は数学的帰納法と定積分の計算の融合問題です。(2)では，場合分けに要注意です。

5　問題のページへ

(1)　曲線 $y=x^2+c$ ……①，$y=\log x$ ……②に対して，②上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は，$y'=\dfrac{1}{x}$ から，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x+\log t-1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を連立して，$x^2+c=\dfrac{1}{t}x+\log t-1$，$x^2-\dfrac{1}{t}x-\log t+1+c=0$ ………④

①③が接することより，$D=\dfrac{1}{t^2}-4(-\log t+1+c)=0$ となり，

$$c=\frac{1}{4t^2}+\log t-1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$f(t)=\dfrac{1}{4t^2}+\log t-1$ とおくと，

$$f'(t)=-\frac{1}{2t^3}+\frac{1}{t}=\frac{2t^2-1}{2t^3}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2-1=-\frac{1}{2}(\log 2+1),\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$$

$$\lim_{t\to+0}f(t)=\lim_{t\to+0}\Big(\frac{1}{4t^2}+\log t-1\Big)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{4t}+t\log t-t\Big)=\infty$$

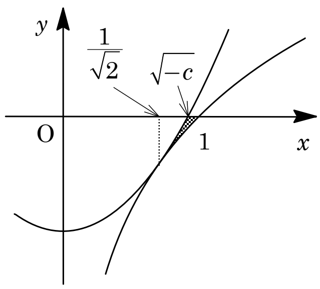
すると，曲線①と②の共通接線の本数は，⑤すなわち $c=f(t)$ の実数解の個数に一致する。よって，$c>-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき 2 本，$c=-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき 1 本，$c<-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき 0 本である。

(2)　$c=-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき，⑤の解は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，④の重解は $x=\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これより，①③の接点と②③の接点は一致し，その座標は，

$$(t,\ \log t)=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\log 2\Big)$$

(3)　(2)のとき，①，②と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-\log x\,dx-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{-c}}-(x^2+c)\,dx$$

$$=-\big[\,x\log x\,\big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dx+\Big[\,\frac{x^3}{3}+cx\,\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{-c}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{3}c\sqrt{-c}-\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}(\log 2+1)\sqrt{\log 2+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\log 2+1)$$

$$=1-\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}(\log 2+1)\sqrt{\log 2+1}=1-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}(\log 2+1)\sqrt{\log 2+1}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。複接線は現れないので，接線の本数が接点の個数に等しいという頻出事項を利用しています。なお，(3)の計算はかなりハードです。また，(1)で極限を求める際に，$\displaystyle\lim_{t\to+0} t\log t = 0$ であることは証明なしで用いています。