1

解答解説のページへ

1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)$ $(0 < s < 1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y = 1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x = 1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x = 1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1)　直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2)　線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3)　$\mathrm{EP}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。

4

解答解説のページへ

a は $0<a<2$ を満たす定数とする。$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$1 \leqq a \leqq 6$，$1 \leqq b \leqq 6$ に対して，2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解をもつとき，この実数解を α，β とすると，

$$\alpha + \beta = a > 0,\ \alpha\beta = b > 0$$

よって，α，β はともに正である。

(2)　実数解の個数が 1 となるとき，$D = a^2 - 4b = 0$ すなわち $a^2 = 4b$ から，

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (4,\ 4)$$

よって，この場合の確率は，$\dfrac{2}{6^2} = \dfrac{1}{18}$ である。

(3)　実数解の個数が 2 となるとき，$D = a^2 - 4b > 0$ すなわち $a^2 > 4b$ から，

(i)　$b = 1$ のとき　$a^2 > 4$ から，$a = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ で 4 通り。

(ii)　$b = 2$ のとき　$a^2 > 8$ から，$a = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ で 4 通り。

(iii)　$b = 3$ のとき　$a^2 > 12$ から，$a = 4,\ 5,\ 6$ で 3 通り。

(iv)　$b = 4$ のとき　$a^2 > 16$ から，$a = 5,\ 6$ で 2 通り。

(v)　$b = 5$ のとき　$a^2 > 20$ から，$a = 5,\ 6$ で 2 通り。

(vi)　$b = 6$ のとき　$a^2 > 24$ から，$a = 5,\ 6$ で 2 通り。

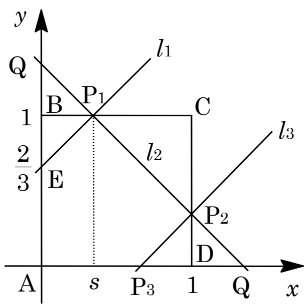
(i)～(iv)より，この場合の確率は，$\dfrac{4+4+3+2+2+2}{6^2} = \dfrac{17}{36}$ である。

［解　説］

よく見かける確率に関する基本題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　点 $\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

　すると，l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $\mathrm{Q}_1\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\dfrac{1}{3s}$ となり，

$$l_2 : y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

　l_2 が $\mathrm{D}(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}$ から，$s=\dfrac{1}{4}$

(2)　l_2 と x 軸との交点 Q_2 は，$0=-\dfrac{1}{3s}x+\dfrac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$\mathrm{Q}_2(4s,\ 0)$ から，

$$\mathrm{DP}_3=\mathrm{DQ}_2=4s-1\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　P_3 は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

　このとき，P_2 は線分 CD 上にある。そこで，$\mathrm{EP}_1=\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ から，$F=\mathrm{EP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ とおくと，

$$F=\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2=\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

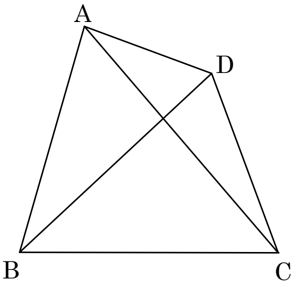
　すると，②より $\dfrac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\dfrac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{3}$ である。

［解 説］

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

3

問題のページへ



(1) 原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は $0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 $s,\ t,\ u$ は $k+s+t+u=1$ を満たす。

そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ u=1-s-t\geqq 0$ となり，

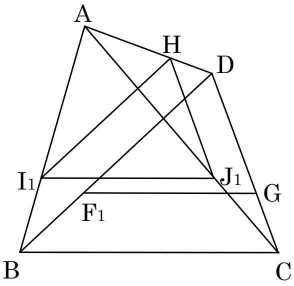
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad (s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は△DBC の内部または辺上となる。

(2) $k=\dfrac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\dfrac{2}{3}$ から $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ u=\dfrac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\left(\frac{2}{3}-s-t\right)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ F_1，G_1 とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

これより，点 Q は△$\mathrm{DF_1G_1}$ の内部または辺上にある。

さらに，AD, AB, AC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ H_1，I_1，J_1 とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}\left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

よって，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ は△$\mathrm{H_1I_1J_1}$ の内部または辺上となる。

(3) (2)と同様にして，$s+t+u=1-k$ から $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ u=1-k-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

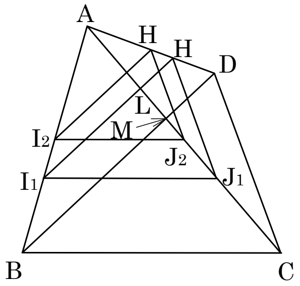
ここで，AD, AB, AC を $1-k:k$ に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\right)$$

よって，$E(k)$ は△HIJ の内部または辺上となる。

さて，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，AD, AB, AC の中点を，それぞれ H_2，I_2，J_2 とおくと，$E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は△$\mathrm{H_2I_2J_2}$ の内部または辺上となる。

すると，$\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ において，どの $E(k)$ にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ と $E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC，BD の交点を M，AC と H_1I_1 の交点を L とすると，



$$AJ_2\geqq AL,\ \frac{1}{2}AC\geqq\frac{2}{3}AM$$

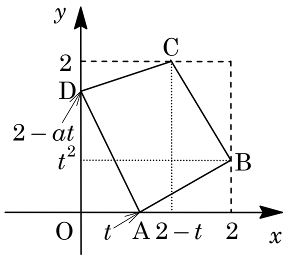
よって，求める条件は，$3AC\geqq 4AM$ である。

［解　説］

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



定数 $a\,(0<a<2)$，および実数 $t\,(0\leqq t\leqq 1)$ に対して，4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を頂点とする四角形 ABCD の面積を $S(t)$ とおく。

$$S(t)=2^2-\frac{1}{2}(2-t)t^2-\frac{1}{2}(2-2+t)(2-t^2)$$
$$-\frac{1}{2}(2-t)(2-2+at)-\frac{1}{2}t(2-at)$$
$$=4-\frac{1}{2}\{-2t^3-2(a-1)t^2+2(a+2)t\}$$
$$=t^3+(a-1)t^2-(a+2)t+4$$

すると，$S'(t)=3t^2+2(a-1)t-(a+2)$ となり，$S'(t)=0$ を満たす正の解は，$S'(0)=-(a+2)<0$ から $t=\dfrac{-a+1+\sqrt{a^2+a+7}}{3}$ であり，これを $t=\alpha$ とおく。

(i)　$0<\alpha<1$ のとき

このとき $S'(1)=a-1>0$ より，$1<a<2$ となる。そして，$0\leqq t\leqq 1$ における $S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\alpha$ で最小となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(ii)　$\alpha\geqq 1$ のとき

このとき $S'(1)=a-1\leqq 0$ より，$0<a\leqq 1$ となる。そして，$0\leqq t\leqq 1$ において $S'(t)\leqq 0$ から $S(t)$ は単調に減少し，$t=1$ で最小となる。

(i)(ii)より，$S(t)$ が最小となるような t の値は，

$$t=\frac{-a+1+\sqrt{a^2+a+7}}{3}\ (1<a<2),\quad t=1\ (0<a\leqq 1)$$

［解 説］

微分と最大・最小に関する標準的な問題です。なお，$S(t)$ の立式については，位置関係に場合分けが生じないので，普通に正方形から 4 つの直角三角形を除きました。