1　　解答解説のページへ

座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0以上の実数$s,\ t,\ u$が$k+s+t+u=1$を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を$E(k)$とする。

(1)　$E(1)$および$E(0)$を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの$E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。

2

解答解説のページへ

数直線上の点 Q は，はじめは原点$x=0$にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が$x=a$にあるとき，

- 出た目が 1 ならば$x=a$にとどまる。
- 出た目が 2, 3 ならば$x=a+1$へ動く。
- 出た目が 4, 5, 6 ならば$x=0$に戻る（$a=0$ならば動かない)。

(1)　整数$a\geqq 0$に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が$x=a$にある確率を求めよ。

(2)　さいころをn回投げたとき，Q が$x=0$にある確率を求めよ。

(3)　さいころをn回投げたとき，Q が$x=1$にある確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2)　$1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3)　$x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

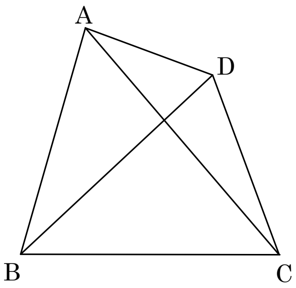
2 点O(0, 0)，A(0, 2) を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と，点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) 正の実数 a に対して，C と x 軸と 2 直線 $x=a$，$x=-a$ によって囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1) 原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は $0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 s, t, u は $k+s+t+u=1$ を満たす。

そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ u=1-s-t\geqq 0$ となり，

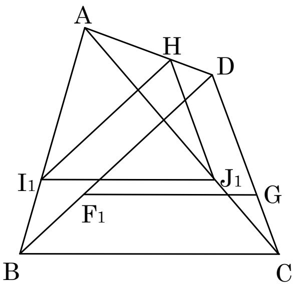
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は△DBC の内部または辺上となる。

(2) $k=\dfrac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\dfrac{2}{3}$ から $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ u=\dfrac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\left(\frac{2}{3}-s-t\right)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{G_1}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

これより，点 Q は△$\mathrm{DF_1G_1}$ の内部または辺上にある。

さらに, AD, AB, AC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{I_1}$，$\mathrm{J_1}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

よって，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ は△$\mathrm{H_1I_1J_1}$ の内部または辺上となる。

(3) (2)と同様にして，$s+t+u=1-k$ から $s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ u=1-k-s-t\geqq 0$ となり，

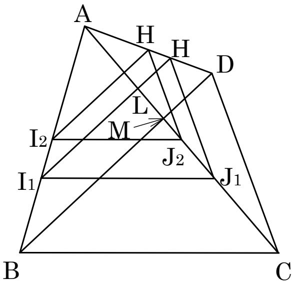
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで, AD, AB, AC を $1-k:k$ に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\right)$$

よって，$E(k)$ は△HIJ の内部または辺上となる。

さて，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，AD, AB, AC の中点を，それぞれ $\mathrm{H_2}$，$\mathrm{I_2}$，$\mathrm{J_2}$ とおくと，$E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は△$\mathrm{H_2I_2J_2}$ の内部または辺上となる。



すると，$\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ において，どの $E(k)$ にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ と $E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC, BD の交点を M, AC と H_1I_1 の交点を L とすると，

$$AJ_2 \geqq AL,\ \frac{1}{2}AC \geqq \frac{2}{3}AM$$

よって，求める条件は，$3AC \geqq 4AM$ である。

［解 説］

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。

2

問題のページへ

(1)　さいころを 3 回投げ Q が $x=a$ にある確率を，a の値で場合分けをして求める。

(i)　$a \geqq 4$ のとき

到達点は $a \leqq 3$ なので，このときの確率は 0 である。

(ii)　$a=3$ のとき

$0\to1\to2\to3$ の場合のみより，このときの確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

(iii)　$a=2$ のとき

$0\to0\to1\to2$，$0\to1\to1\to2$，$0\to1\to2\to2$ の場合があり，これらの確率はそれぞれ $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{54}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{54}$ である。

よって，このときの確率は $\dfrac{2}{27}+\dfrac{1}{54}+\dfrac{1}{54}=\dfrac{1}{9}$ である。

(iv)　$a=1$ のとき

$0\to0\to0\to1$，$0\to0\to1\to1$，$0\to1\to0\to1$，$0\to1\to1\to1$ の場合があり，これらの確率はそれぞれ $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{108}$ である。

よって，このときの確率は $\dfrac{4}{27}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{108}=\dfrac{1}{4}$ である。

(v)　$a=0$ のとき

このときの確率は，(i)～(iv)の結果から，$1-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{65}{108}$ である。

(2)　さいころを n 回投げ，Q が $x=0$，$x\neq0$ にある確率をそれぞれ p_n，q_n とおくと，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}q_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{2}$$

すると，$p_{n+1}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{6}\left(p_n-\dfrac{3}{5}\right)$ となり，$p_1=\dfrac{2}{3}$ から，

$$p_n-\frac{3}{5}=\left(p_1-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{15}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}+\dfrac{3}{5}$ である。

(3)　さいころを n 回投げ，Q が $x=1$ にある確率を r_n とおくと，$r_1=\dfrac{1}{3}$ で，(2)から，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}r_n=\frac{1}{6}r_n+\frac{1}{45}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$$

すると，両辺に 6^n をかけて，$6^n r_{n+1}=6^{n-1}r_n+\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{5}\cdot6^n$ となり，$n\geqq2$ で，

$$6^{n-1}r_n=6^0r_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{5}\cdot6^k\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}(n-1)+\frac{1}{5}\cdot\frac{6(6^{n-1}-1)}{6-1}$$

$$=\frac{2}{15}n+\frac{1}{25}\cdot6^n-\frac{1}{25}$$

$$r_n=\frac{2}{15}n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{25}-\frac{1}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{15}n-\frac{1}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{25}$$

$n=1$をあてはめると，$r_1=\frac{2}{15}-\frac{1}{25}+\frac{6}{25}=\frac{1}{3}$となり成立するので，

$$r_n=\left(\frac{2}{15}n-\frac{1}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{25}$$

［解　説］

設定が微妙に複雑な確率の問題です。(1)では，記述を省略しましたが，樹系図を書いて数えもれのチェックをしています。また，(2)は直接的に求めようかとも思いましたが，無難な漸化式という方針を採用しました。また，(3)は(2)の結果を利用しましたが，漸化式がやや複雑なタイプです。詳しくは「ピンポイントレクチャ―」を参照してください。

3　　問題のページへ

(1)　$x>0$ において $f(x)=x-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘	1	↗

$f(x)\geqq 1>0$

よって，$x>0$ において，$\log x<x$ ………①

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

ここで，$1<a<c<b$ となる c に対して，$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$ から，

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c),\ \frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=-\frac{b-a}{c(\log c)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{b-a}{c(\log c)^2}$ ………②

また，$0<a(\log a)^2<c(\log c)^2$ から，$0<\dfrac{1}{c(\log c)^2}<\dfrac{1}{a(\log a)^2}$ ………③

②③より，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ ………④

(3)　$x\geqq e$ において，$F(x)=\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}-\log(\log x)-\frac{1}{2(\log x)^2}+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{1}{x\log(x+1)}-\frac{1}{x\log x}+\frac{1}{x(\log x)^3}$$
$$=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{\log(x+1)}+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}$$

④より $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{\log(x+1)}<\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ となり，①から $\log x<x$ なので，

$$F'(x)>-\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(\log x)^2}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}=-\frac{\log x-x}{x^2(\log x)^3}>0$$

すると，$x\geqq e$ において，$F(x)\geqq F(e)=0-\log 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ となり，

$$\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$$

［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。(1)(2)の誘導で(3)の見通しは良好です。なお，(2)では，不等式の形から平均値の定理の出番です。

4

問題のページへ

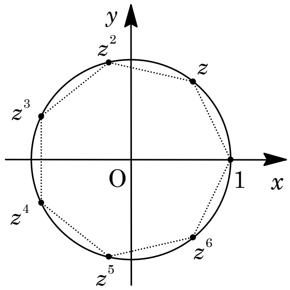
(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は2次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3)　$x^7=1$ の解は，$x=1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6$ より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\ \cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると，

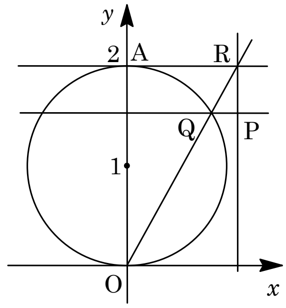
$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

［解　説］

1 の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　点 $O(0,\ 0)$，$A(0,\ 2)$ を直径の両端とする円周上の点 Q を $Q(\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ とおく。

ただし，$(\cos\theta,\ \sin\theta)\neq(0,\ -1)$ である。

ここで，直線 OQ の式は $y=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}x$ となり，直線 $y=2$ との交点は，$x=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$ から，

$$R\left(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\ 2\right),\ P\left(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\ 1+\sin\theta\right)$$

そこで，$P(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$……①，$y=1+\sin\theta$……②となり，

②を①に代入して，$\cos\theta=\dfrac{xy}{2}$，$\sin\theta=y-1$ となり，

$$\frac{x^2y^2}{4}+(y-1)^2=1,\ x^2y^2+4y^2-8y=0$$

ここで，$y=0$ とすると $(\cos\theta,\ \sin\theta)=(0,\ -1)$ となり，不適である。

よって，点 P の軌跡 C の方程式は，$x^2y+4y-8=0$ すなわち $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ である。

(2)　C と x 軸と 2 直線 $x=a$，$x=-a$ によって囲まれる図形は y 軸対称であり，この図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ は，

$$V(a)=2\pi\int_0^a\frac{64}{(x^2+4)^2}dx=128\pi\int_0^a\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$$

ここで，$x=2\tan\varphi\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{2}{\cos^2\varphi}d\varphi$ となり，$x=0\to a$ のとき $a=2\tan\alpha$ とすると $\varphi=0\to\alpha$ となるので，

$$V(a)=128\pi\int_0^{\alpha}\frac{1}{(4\tan^2\varphi+4)^2}\cdot\frac{2}{\cos^2\varphi}d\varphi=16\pi\int_0^{\alpha}(\cos^2\varphi)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$$
$$=16\pi\int_0^{\alpha}\cos^2\varphi d\varphi=8\pi\int_0^{\alpha}(1+\cos2\varphi)d\varphi=8\pi\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right]_0^{\alpha}$$
$$=8\pi\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha\right)$$

すると，$a\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}8\pi\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha\right)=4\pi^2$

［解 説］

軌跡と回転体の体積についての標準的な問題です。計算は易しめです。