**1**

解答解説のページへ

座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の $x$ 座標は点 P の $x$ 座標より大きいものとする。$\angle\mathrm{APQ}=\theta$ とし，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を $S$ とする。

(1) $S$ を $\theta$ を用いて表せ。

(2) $S$ の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の $x$ 座標を求めよ。

(3) $S$ が $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の $x$ 座標を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は，出た目が得点になる。
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が $n$ となる確率を $p_n$ とする。

(1)　総得点 $n$ の最大値，最小値と，それらの $n$ に対する $p_n$ を求めよ。

(2)　$p_6$ を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$n$ を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 $A_1A_3$ と線分 $A_2A_4$ との交点 P は線分 $A_1A_3$ を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$k$ を用いて表せ。

(2) $t$ を $k$ を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

座標平面上の点$(a,\ b)$から曲線$y=x^3-3x$に引ける接線の本数を$n$とする。

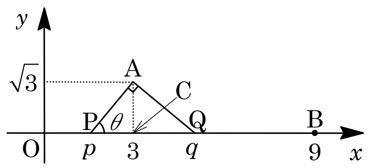
(1)　$n=3$を満たすような点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。

(2)　$-3a<b$かつ$n\leqq 2$を満たすように点$(a,\ b)$が動くとき，$b-3a$の最小値を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　O(0, 0)，A$(3,\ \sqrt{3})$，B(9, 0)に対し，線分 OB 上に点P($p$, 0)，Q($q$, 0)があり，$\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$ を満たしている。ただし，$0\leqq p<3<q\leqq 9$ である。




$\angle\mathrm{APQ}=\theta$ とすると，$\mathrm{AP}\sin\theta=\sqrt{3}$ ………①

$\mathrm{AQ}\sin(90^\circ-\theta)=\sqrt{3}$，$\mathrm{AQ}\cos\theta=\sqrt{3}$ ………②

ここで，△APQ の面積を $S$ とすると，①②から，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin 2\theta}$$

(2)　まず，(1)から $S=\dfrac{3}{\sin 2\theta}\geqq 3$ である。ここで，等号が成立するのは $\sin 2\theta=1$，すなわち $\theta$ は鋭角から $\theta=45^\circ$ のときである。

このとき，△APQ は直角二等辺三角形となり，C(3, 0)とおくと $\mathrm{PC}=\mathrm{QC}=\sqrt{3}$ から，P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって，$S$ の最小値は 3 であり，このとき P の $x$ 座標は $3-\sqrt{3}$，Q の $x$ 座標は $3+\sqrt{3}$ となる。

(3)　まず，$\triangle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ となり，条件より $S=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{AOB}$ から，

$$\frac{3}{\sin 2\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3},\quad \sin 2\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ なので，③と合わせると，

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\sqrt{3},\quad \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{3},\quad \tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+1=0$$

よって，$\tan\theta=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ ……④となる。

さて，$\mathrm{PC}=\sqrt{3}\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$，$\mathrm{QC}=\sqrt{3}\tan\theta$ で，条件から，$0<\mathrm{PC}\leqq 3$，$0<\mathrm{QC}\leqq 6$ であるので，

$$0<\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}\leqq 3\ \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad 0<\sqrt{3}\tan\theta\leqq 6\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より $\tan\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，⑥より $0<\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$ となり $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$

すると，④から $\tan\theta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ となり，このとき，

$$\mathrm{PC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=3-\sqrt{6},\quad \mathrm{QC}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3+\sqrt{6}$$

よって，P の $x$ 座標 $3-(3-\sqrt{6})=\sqrt{6}$，Q の $x$ 座標 $3+(3+\sqrt{6})=6+\sqrt{6}$ である。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題で，いろいろな解法が考えられます。

**2**

問題のページへ

(1)　題意の総得点 $n$ が最大となるのは，3 回の出た目が 6，5，4 の場合で，最大値は $n=6+5+4=15$ である。このときの確率 $p_{15}$ は，

$$p_{15}=3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

また，総得点 $n$ が最小となるのは，3 回の出た目が 1，1，1 の場合で，最小値は $n=1+0+0=1$ である。このときの確率 $p_1$ は，

$$p_1=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(2)　総得点が 6 のとき，3 回の出た目について同じ目の出方で場合分けをする。

(i)　同じ目が出なかったとき

3 回の出た目は 1, 2, 3 の場合だけであり，このときの確率は，

$$3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6}{216}$$

(ii)　同じ目が 2 回出たとき

3 回の出た目は 1，1，5 または 1，5，5 または 2，2，4 または 2，4，4 の場合であり，このときの確率は，

$$\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{12}{216}$$

(iii)　同じ目が 3 回出たとき

3 回の出た目は 6, 6, 6 の場合だけであり，このときの確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(i)〜(iii)より，総得点 6 の確率 $p_6$ は，$p_6=\frac{6}{216}+\frac{12}{216}+\frac{1}{216}=\frac{19}{216}$

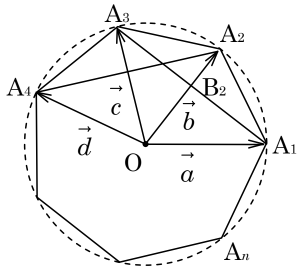
［解　説］

確率の基本的な問題です。ミスに要注意です。

**3**

問題のページへ

(1)　点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 $OA_2$ は線分 $A_1A_3$ の垂直二等分線であり，$OA_2$ と $A_1A_3$ との交点を $B_2$ とおくと，



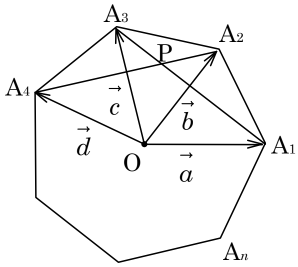

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 $OA_3$ は線分 $A_2A_4$ の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。

(2)　まず，P は線分 $A_1A_3$ を $t:1-t$ に内分するので，




$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 $A_4A_2$ を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2\cdots\cdots\cdots③$

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

［解　説］

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

**4**　問題のページへ

(1)　曲線 $y = x^3 - 3x$ に対して，$y' = 3x^2 - 3$ となり，点 $(t,\ t^3 - 3t)$ における接線は,

$$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t),\quad y = (3t^2 - 3)x - 2t^3$$

この接線が点 $(a,\ b)$ を通ることより，$b = (3t^2 - 3)a - 2t^3$ となり,

$$-2t^3 + 3at^2 - 3a = b \cdots\cdots\cdots ①$$

接線が 3 本引ける条件は, 複接線が存在しないことより, 接点が 3 個すなわち①の異なる実数解が 3 個ある条件に等しい。

そこで, $f(t) = -2t^3 + 3at^2 - 3a$ とおくと, ①は $f(t) = b$ となり,

$$f'(t) = -6t^2 + 6at = -6t(t - a)$$

(i)　$a > 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表のようになり, ①が 3 個の実数解をもつ条件は,

$$-3a < b < a^3 - 3a$$

| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | $-3a$ | $\nearrow$ | $a^3 - 3a$ | $\searrow$ |

(ii)　$a = 0$ のとき

$f'(t) = -6t^2 \leqq 0$ となり，$f(t)$ は単調減少するので, ①が 3 個の異なる実数解をもつことはない。

(iii)　$a < 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表のようになり, ①が 3 個の実数解をもつ条件は,

$$a^3 - 3a < b < -3a$$

| $t$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(t)$ | $\searrow$ | $a^3 - 3a$ | $\nearrow$ | $-3a$ | $\searrow$ |

(i)〜(iii)より, 点 $(a,\ b)$ の範囲を図示する。

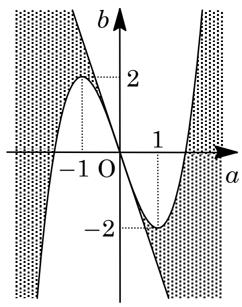
そこで, 境界線 $b = a^3 - 3a$ に対して,

$$b' = 3a^2 - 3 = 3(a+1)(a-1)$$

すると, $b$ の値の変化は右表のようになる。

| $a$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $b$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ |

以上より, 点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部となる。ただし, 境界線は含まない。




(2)　まず, $-3a < b$ のもとで, 接線の本数が 2 本以下, すなわち①の異なる実数解が 2 個以下となる $(a,\ b)$ の条件を求める。

(i)　$a > 0$ のとき

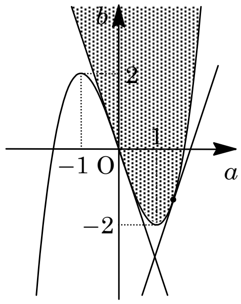
$-3a < b$ なので, ①の実数解が 2 個以下となる条件は,

$$b \geqq a^3 - 3a$$

(ii)　$a = 0$ のとき

つねに①の実数解は 1 個となるので，$-3a < b$ から,

$$b > 0$$




(iii) $a<0$のとき

$-3a<b$のとき, ①の実数解は1個なので,

$$b>-3a$$

(i)〜(iii)より, 点$(a,\ b)$の範囲は右図の網点部となる。

ただし, 境界線は$a>0$の部分のみを含む。

さて, このとき$b-3a=k$ $(b=3a+k)$が最小となるのは, 右図から, 曲線$b=a^3-3a$が傾き3の接線をもつときなので, $b'=3a^2-3=3$から, $a=\sqrt{2}$となる。

すると, $b=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$から, 接点の座標は$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$となる。

以上より, $b-3a=k$の最小値は, $-\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$である。

［解　説］

超頻出の3次曲線の接線の本数の問題に, 領域と最大・最小の問題が付け加えられています。なお, (1)の結果を補集合として利用すると, (2)の記述量はやや減少します。