1

解答解説のページへ

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

2

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・ 1 回目は，出た目が得点になる。

・ 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・ 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。

3

解答解説のページへ

t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

複素数平面上の点 $z\left(z \neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1)　点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t\geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

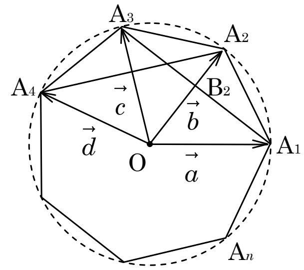
(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

1

問題のページへ



(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

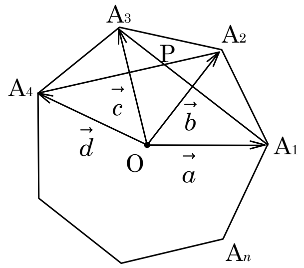
$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。

(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，



$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3) 条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2\cdots\cdots\cdots③$

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

［解　説］

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

2

問題のページへ

(1)　題意の総得点 n が最大となるのは，3 回の出た目が 6，5，4 の場合で，最大値は $n=6+5+4=15$ である。このときの確率 p_{15} は，

$$p_{15}=3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

また，総得点 n が最小となるのは，3 回の出た目が 1，1，1 の場合で，最小値は $n=1+0+0=1$ である。このときの確率 p_1 は，

$$p_1=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(2)　総得点が 6 のとき，3 回の出た目について同じ目の出方で場合分けをする。

(i)　同じ目が出なかったとき

出た目が 1, 2, 3 の場合だけであり，このときの確率は $3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6}{216}$ である。

(ii)　同じ目が 2 回出たとき

出た目が 1, 1, 5 または 1, 5, 5 または 2, 2, 4 または 2, 4, 4 の場合であり，このときの確率は，

$$\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=4\cdot 3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{12}{216}$$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が 6, 6, 6 の場合だけであり，このときの確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$ である。

(i)～(iii)より，総得点 6 の確率 p_6 は，$p_6=\frac{6}{216}+\frac{12}{216}+\frac{1}{216}=\frac{19}{216}$

(3)　題意の総得点 n の値の範囲は，(1)から $1\leqq n\leqq 15$ である。そして，(2)と同様に，同じ目の出方について，場合分けをする。

(i)　同じ目が出なかったとき

出た目が a，b，c $(a<b<c)$ のとき，n の値とその出方 N 通りの関係は，

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	$3!$	$3!$	$2\cdot 3!$	$3\cdot 3!$	$3\cdot 3!$	$3\cdot 3!$	$3\cdot 3!$	$2\cdot 3!$	$3!$	$3!$

(ii)　同じ目が 2 回出たとき

出た目が a，a，b か a，b，b $(a<b)$ のとき，n の値とその出方 N 通りの関係は，

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	$2\cdot 3$	$2\cdot 3$	$4\cdot 3$	$4\cdot 3$	$6\cdot 3$	$4\cdot 3$	$4\cdot 3$	$2\cdot 3$	$2\cdot 3$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が a だけのとき，n の値とその出方 N 通りの関係は，

n	1	2	3	4	5	6
N	1	1	1	1	1	1

(i)～(iii)より，n の値とその出方 N 通りの関係をまとめると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	1	1	7	7	13	19	24	24	30	24	24	18	12	6	6

以上より，$n=9$ のとき N の値が最大となるので，p_n の最大値は，

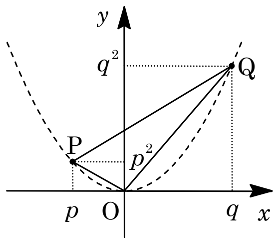
$$p_9 = 30\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5}{36}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。理系単独の(3)は，1 組の出た目について，その確率がすべて $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ であることに着目して，出た目のパターンの数を全調査しました。時間はかなりかかりましたが。

3

問題のページへ



(1) 点$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)\ (p<q)$に対して，$\mathrm{PQ}=2$より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$

ここで，$p+q=\sqrt{t}\ (t\geqq 0)$……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ………③

$$p=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2) $\triangle\mathrm{OPQ}$の面積をSとすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\Big(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\Big)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3) 条件より$S=1$なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t},\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$の増減は右表のようになり，$t>0$において⑦の解はただ1つ存在する。

t	0	…	11	…
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より，⑤の解すなわち$S=1$となるtの個数は，⑥を合わせて2である。

［解　説］

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが，$t=0$が解の 1 つであることがわかり……。

4　　問題のページへ

(1)　与えられた条件より，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}\left(z\neq -\dfrac{i}{2}\right)$………①

さて，点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くことより，$|z|=1$………②

①より，$w(2z+i)=z+2i$ となり $(2w-1)z=-i(w-2)$ であるが，$w=\dfrac{1}{2}$ のときは成立しないので，$w\neq\dfrac{1}{2}$ となり，

$$z=\frac{-i(w-2)}{2w-1}\left(w\neq\frac{1}{2}\right)\text{………③}$$

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{-i(w-2)}{2w-1}\right|=1$ から $\dfrac{|-i||w-2|}{|2w-1|}=1$ となり，

$$|w-2|=|2w-1|$$

両辺を 2 乗して $|w-2|^2=|2w-1|^2$ から，$(w-2)(\overline{w}-2)=(2w-1)(2\overline{w}-1)$

$$w\overline{w}-2w-2\overline{w}+4=4w\overline{w}-2w-2\overline{w}+1,\ w\overline{w}=1$$

よって，$|w|=1$ となるので，点 w は原点を中心とする半径 1 の円周を描く。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$|z-\alpha|=1$………④

③を④に代入すると，$\left|\dfrac{-i(w-2)}{2w-1}-\alpha\right|=1$ から $\left|\dfrac{(-i-2\alpha)w+2i+\alpha}{2w-1}\right|=1$

$$|(-i-2\alpha)w+2i+\alpha|=|2w-1|,\ |(-i-2\alpha)w+2i+\alpha|^2=|2w-1|^2$$

$$\{(-i-2\alpha)w+2i+\alpha\}\{(i-2\overline{\alpha})\overline{w}-2i+\overline{\alpha}\}=(2w-1)(2\overline{w}-1)\text{………⑤}$$

また，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描くことより，$|w|=r$ から，

$$w\overline{w}=r^2\text{………⑥}$$

⑤⑥が一致することより，$(-i-2\alpha)(-2i+\overline{\alpha})=-2$，$(2i+\alpha)(i-2\overline{\alpha})=-2$ が必要となるが，この 2 式は等しく，

$$-2-i\overline{\alpha}+4i\alpha-2\alpha\overline{\alpha}=-2,\ 2\alpha\overline{\alpha}+(\overline{\alpha}-4\alpha)i=0\text{………⑦}$$

ここで，p, q を実数として，$\alpha=p+qi$ とおくと，⑦より，

$$2(p^2+q^2)+(p-qi-4p-4qi)i=0,\ (2p^2+2q^2+5q)-3pi=0$$

よって，$2p^2+2q^2+5q=0$ かつ $p=0$ より，$(p,\ q)=(0,\ 0)$，$\left(0,\ -\dfrac{5}{2}\right)$ となり，

(i)　$\alpha=0$ のとき　(1)より⑤は $w\overline{w}=1$ となり，⑥から $r=1$ である。

(ii)　$\alpha=-\dfrac{5}{2}i$ のとき　$-i-2\alpha=4i$，$2i+\alpha=-\dfrac{1}{2}i$ となるので，⑤に代入する。

すると，$16w\overline{w}+\dfrac{1}{4}=4w\overline{w}+1$ から $w\overline{w}=\dfrac{1}{16}$ となり，⑥から $r=\dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

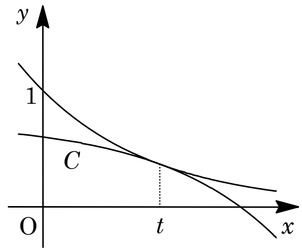
複素数平面上の円の変換の問題です。なお，(2)は(1)と同じ方法を採用しています。

5

問題のページへ

(1)　曲線 $y=-e^x$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は,

$y=-e^{x-a}+b$ ………①



また, 曲線 C は曲線 $y=e^{-x}$ ……②と $x=t\ (t\geqq 0)$ で接するので, ①より $y'=-e^{x-a}$, ②より $y'=-e^{-x}$ から,

$-e^{t-a}=-e^{-t}$ ………③

$-e^{t-a}+b=e^{-t}$ ………④

③から, $t-a=-t$ より $a=2t$ となり, この式を④に代入すると, $-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので, ①に代入して,

$C:y=-e^{x-2t}+2e^{-t}$ ………⑤

(2)　C と x 軸との交点は, ⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から, $e^{x-2t}=2e^{-t}$

$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t$, $x=t+\log 2$

すると, C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})dx=\left[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\right]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3)　(2)より, $S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで, $f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと,

$f'(t)=1-e^{-t}$

これより, $t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると, $f(0)=-1+\log 2<0$, $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\infty$ から, $f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ 1 つ存在する。

この α を用いて $t\geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると, 右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより, $S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。

すなわち, $S(t)$ が最大となるような t の値はただ 1 つ存在する。

［解　説］

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので, 混乱しないように注意が必要です。