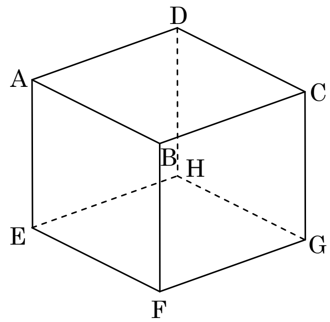
1

解答解説のページへ

右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $\mathrm{OQ}=2\mathrm{AP}-1$ を満たしながら動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。ただし，点 P，Q は点 O とは一致しないものとする。



2

解答解説のページへ

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1) 確率 $P(4)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(6)$ を求めよ。

(3) 確率 $P(11)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3)　s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

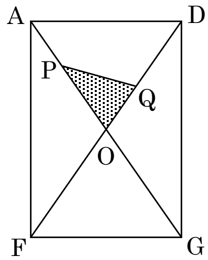
初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通して現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり, また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。

1

問題のページへ



1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF を含む断面は，右図の長方形 AFGD である。

ここで，$\mathrm{AD}=\mathrm{FG}=2$，$\mathrm{AF}=\mathrm{DG}=2\sqrt{2}$ から，

$$\mathrm{AG}=\mathrm{DF}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}\,,\ \mathrm{OA}=\mathrm{OD}=\sqrt{3}$$

また，$\angle\mathrm{AOD}=2\angle\mathrm{AFD}$ であり，

$$\sin\angle\mathrm{AFD}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\angle\mathrm{AFD}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

これより，$\sin\angle\mathrm{AOD}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ となる。

さて，$\mathrm{OP}=x\ (0<x\leqq\sqrt{3})$ とおくと，条件より，

$$\mathrm{OQ}=2\mathrm{AP}-1=2(\sqrt{3}-x)-1=-2x+2\sqrt{3}-1$$

すると，$0<-2x+2\sqrt{3}-1\leqq\sqrt{3}$ から $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\leqq x<\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ となり，$0<x\leqq\sqrt{3}$ と合わせて $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\leqq x<\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ……(*)となる。

そこで，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin\angle\mathrm{AOD}=\frac{1}{2}x(-2x+2\sqrt{3}-1)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big(x^2-\frac{2\sqrt{3}-1}{2}x\Big)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big(x-\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\Big)^2+\frac{\sqrt{2}}{24}(2\sqrt{3}-1)^2\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big(x-\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\Big)^2+\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24}\end{aligned}$$

よって，(*)から，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S は $x=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24}$ をとる。

［解 説］

図形の計量に関する基本的な問題です。ただ，最後の平方完成はやや難ですが。

2　　問題のページへ

(1)　もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき, 金, 銀, 白である確率は, それぞれ$\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{n-2}{n}$である。そして, 金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, その合計点を考える。

さて, 4 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは, 3 回目までの合計点が 50 点で, 4 回目に金という場合だけである。すると, 3 回目までは金が 1 回, 白が 2 回となり, その確率$P(4)$は,

$$P(4)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}=\frac{3(n-2)^2}{n^4}$$

(2)　6 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは, 5 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　5 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 6 回目は金であり, 5 回目までは金 1 回, 白 4 回または銀 5 回となるので, その確率は,

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^5\times\frac{1}{n}=\frac{5(n-2)^4+1}{n^6}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 6 回目は銀であり, 5 回目までは金 1 回, 銀 4 回となるので, その確率は,

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}=\frac{5}{n^6}$$

(i)(ii)より, 求める確率$P(6)$は, $P(6)=\dfrac{5(n-2)^4+1}{n^6}+\dfrac{5}{n^6}=\dfrac{5(n-2)^4+6}{n^6}$

(2)　11 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは, 10 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　10 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 11 回目は金であり, 10 回目までは金 1 回, 白 9 回または銀 5 回, 白 5 回となるので, その確率は,

$${}_{10}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^9\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{n}\right)^5\left(\frac{n-2}{n}\right)^5\times\frac{1}{n}=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 11 回目は銀であり, 10 回目までは金 1 回, 銀 4 回, 白 5 回または銀 9 回, 白 1 回となるので, その確率は,

$${}_{10}\mathrm{C}_1\,{}_9\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^4\left(\frac{n-2}{n}\right)^5\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{n}\right)^9\cdot\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

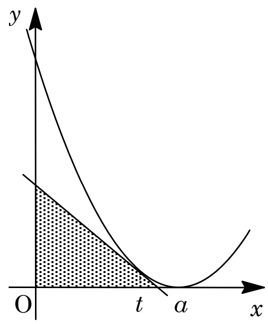
(i)(ii)より，求める確率 $P(11)$ は,

$$P(11)=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}+\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$
$$=\frac{10(n-2)^9+1512(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

［解 説］

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので，その 1 回手前の状態に着目しています。

3　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ



(1)　曲線 $y=(x-a)^2$ に対し $y'=2(x-a)$ となり，$0\leqq t<a$ において，点 $(t,\ (t-a)^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t-a)^2=2(t-a)(x-t)$$

$$y=2(t-a)x-t^2+a^2\cdots\cdots\cdots ①$$

すると，①と y 軸との交点は $(0,\ -t^2+a^2)$ となり，また x 軸との交点は $\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$ である。

そこで，接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと，

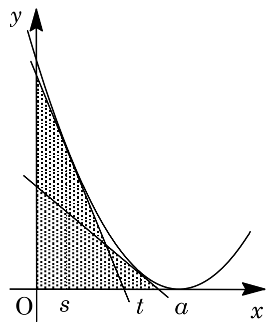
$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　②より，$S'(t)=\dfrac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)=-\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

すると，$0\leqq t<a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$ は $t=\dfrac{a}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

t	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$S\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+a^3\right)=\frac{8}{27}a^3$$



(3)　$0\leqq s\leqq t<a$ のとき，点 $(s,\ (s-a)^2)$ における接線の方程式は，①より，

$$y=2(s-a)x-s^2+a^2\cdots\cdots\cdots ③$$

さて，2 つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の面積を $T(t,\ s)$ とすると，

(i)　$0\leqq s=t<a$ のとき

$T(t,\ s)=S(t)$ より，(2)から最大値は $\dfrac{8}{27}a^3$ である。

(ii)　$0\leqq s<t<a$ のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\ \ x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\dfrac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\dfrac{t+s}{2}$ となり，

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，t を $t=t_0\ (0<t_0<a)$ で固定し，s を $0\leqq s<t_0$ で動かすと考え，

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-t_0{}^3-at_0{}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}(t_0{}^3+t_0{}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

すると，$0\leqq s<t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，

s	0	$\cdots$	$\frac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$T(t_0,\ s)$ は $s=\frac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

$$T\left(t_0,\ \frac{t_0}{3}\right)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\left({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\right)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\left(t,\ \frac{t}{3}\right)$ とおき直すと，$U(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\right)$ から，

$$U'(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\right)$$
$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$U(t)$ は $t=\frac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は，

$$U\left(\frac{3}{5}a\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\right)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\frac{3}{5}a$，$s=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}a=\frac{a}{5}$ のとき，最大値 $\frac{8}{25}a^3$ をとる。

［解　説］

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。

4

問題のページへ

(1)　初項 1，公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また，初項 3，公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通して現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n=b_m$から，

$$6n-5=4m-1,\ 3n-2m=2\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m)=(2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2=2\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで，3 と 2 は互いに素なので，jを整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$から，

$$n=2j+2,\ m=3j+2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$より$j\geqq0$となるので，$k=j+1\geqq1$とおくと，③より，

$$n=2(k-1)+2=2k,\ m=3(k-1)+2=3k-1$$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$である。

(2)　まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$に注意して，$\{d_l\}$のd_3以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$から 4 項を第 1 群，$c_2=19$から 4 項を第 2 群，$c_3=31$から 4 項を第 3 群，…と呼ぶ。

$$1,\ 3\ \Big|\ \underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}\ \Big|\ \underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}\ \Big|\ \underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}\ \Big|\cdots\cdots$$

さて，d_{1000}が第 i 群に属するとすると，$2+4(i-1)<1000\leqq2+4i$から，$i=250$となり，第 250 群に属する。

さらに，$1000-(2+4\times249)=2$から，第 250 群の 2 項目となるので，

$$d_{1000}=c_{250}+4=(12\times250-5)+4=2999$$

また，d_{1001}は第 250 群の 3 項目となるので，

$$d_{1000}=c_{250}+6=(12\times250-5)+6=3001$$

［解　説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。(1)は頻出題ですが，(2)はあまり見かけません。解答例では，$\{c_k\}$に注目し，群数列の考え方を利用して記しました。