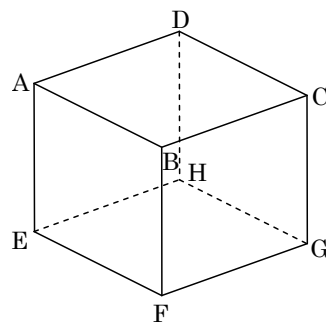


1

右図のような1辺の長さが2の立方体 $ABCD-EFGH$ に対して、対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ = 2AP - 1$ を満たしながら動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし、点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。

解答解説のページへ



2

解答解説のページへ

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

- (1) 確率 $P(4)$ を求めよ。
- (2) 確率 $P(6)$ を求めよ。
- (3) 確率 $P(11)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の数とし、 t は $0 \leq t < a$ を満たす数とする。点 $(t, (t-a)^2)$ における曲線 $y = (x-a)^2$ の接線と、 x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

- (1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
- (2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値、およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
- (3) s は $0 \leq s \leq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値、およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \dots$ の第 n 項を a_n とし、また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \dots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし、2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり、また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

- (1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。
- (2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。

1

問題のページへ

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して、対角線 AG と DF を含む断面は、右図の長方形 AFGD である。

ここで、 $AD = FG = 2$ 、 $AF = DG = 2\sqrt{2}$ から、

$$AG = DF = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}, \quad OA = OD = \sqrt{3}$$

また、 $\angle AOD = 2\angle AFD$ であり、

$$\sin \angle AFD = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \angle AFD = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

これより、 $\sin \angle AOD = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ となる。

さて、 $OP = x$ ($0 < x \leq \sqrt{3}$) とおくと、条件より、

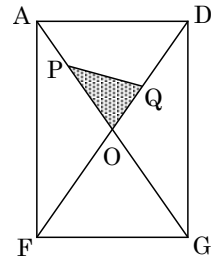
$$OQ = 2AP - 1 = 2(\sqrt{3} - x) - 1 = -2x + 2\sqrt{3} - 1$$

すると、 $0 < -2x + 2\sqrt{3} - 1 \leq \sqrt{3}$ から $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x < \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ となり、 $0 < x \leq \sqrt{3}$ と合わせて $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x < \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ……(*)となる。

そこで、 $\triangle OPQ$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OP \cdot OQ \sin \angle AOD = \frac{1}{2} x (-2x + 2\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(x^2 - \frac{2\sqrt{3}-1}{2} x \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(x - \frac{2\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{24} (2\sqrt{3}-1)^2 \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(x - \frac{2\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + \frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24} \end{aligned}$$

よって、(*)から、 $\triangle OPQ$ の面積 S は $x = \frac{2\sqrt{3}-1}{4}$ のとき最大値 $\frac{13\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24}$ をとる。



[解説]

図形の計量に関する基本的な問題です。ただ、最後の平方完成はやや難ですが。

2

問題のページへ

- (1) もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき、金、銀、白である確率は、それぞれ $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$ である。そして、金なら 50 点、銀なら 10 点、白なら 0 点と記録し、その合計点を考える。

さて、4 回目に合計点が始めて 100 点となるのは、3 回目までの合計点が 50 点で、4 回目に金という場合だけである。すると、3 回目までは金が 1 回、白が 2 回となり、その確率 $P(4)$ は、

$$P(4) = {}_3C_1 \frac{1}{n} \left(\frac{n-2}{n} \right)^2 \times \frac{1}{n} = \frac{3(n-2)^2}{n^4}$$

- (2) 6 回目に合計点が始めて 100 点となるのは、5 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

- (i) 5 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 6 回目は金であり、5 回目までは金 1 回、白 4 回または銀 5 回となるので、その確率は、

$${}_5C_1 \frac{1}{n} \left(\frac{n-2}{n} \right)^4 \times \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} \right)^5 \times \frac{1}{n} = \frac{5(n-2)^4 + 1}{n^6}$$

- (ii) 5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 6 回目は銀であり、5 回目までは金 1 回、銀 4 回となるので、その確率は、

$${}_5C_1 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^4 \times \frac{1}{n} = \frac{5}{n^6}$$

- (i)(ii)より、求める確率 $P(6)$ は、 $P(6) = \frac{5(n-2)^4 + 1}{n^6} + \frac{5}{n^6} = \frac{5(n-2)^4 + 6}{n^6}$

- (2) 11 回目に合計点が始めて 100 点となるのは、10 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

- (i) 10 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 11 回目は金であり、10 回目までは金 1 回、白 9 回または銀 5 回、白 5 回となるので、その確率は、

$${}_{10}C_1 \frac{1}{n} \left(\frac{n-2}{n} \right)^9 \times \frac{1}{n} + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{n} \right)^5 \left(\frac{n-2}{n} \right)^5 \times \frac{1}{n} = \frac{10(n-2)^9 + 252(n-2)^5}{n^{11}}$$

- (ii) 5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 11 回目は銀であり、10 回目までは金 1 回、銀 4 回、白 5 回または銀 9 回、白 1 回となるので、その確率は、

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_1 {}_9C_4 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^4 \left(\frac{n-2}{n} \right)^5 \times \frac{1}{n} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{n} \right)^9 \cdot \frac{n-2}{n} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1260(n-2)^5 + 10(n-2)}{n^{11}} \end{aligned}$$

(i)(ii)より、求める確率 $P(11)$ は、

$$\begin{aligned} P(11) &= \frac{10(n-2)^9 + 252(n-2)^5}{n^{11}} + \frac{1260(n-2)^5 + 10(n-2)}{n^{11}} \\ &= \frac{10(n-2)^9 + 1512(n-2)^5 + 10(n-2)}{n^{11}} \end{aligned}$$

[解説]

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので、その1回手前の状態に着目しています。

3

問題のページへ

- (1) 曲線 $y = (x-a)^2$ に対し $y' = 2(x-a)$ となり, $0 \leq t < a$ において, 点 $(t, (t-a)^2)$ における接線の方程式は,

$$y - (t-a)^2 = 2(t-a)(x-t)$$

$$y = 2(t-a)x - t^2 + a^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

すると, ①と y 軸との交点は $(0, -t^2 + a^2)$ となり, また x 軸との交点は $(\frac{t+a}{2}, 0)$ である。

そこで, 接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t+a}{2} (-t^2 + a^2) = \frac{1}{4} (-t^3 - at^2 + a^2t + a^3) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

- (2) ②より, $S'(t) = \frac{1}{4} (-3t^2 - 2at + a^2) = -\frac{1}{4} (3t-a)(t+a)$

すると, $0 \leq t < a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより, $S(t)$ は $t = \frac{a}{3}$ のとき最大となり, 最大値は,

t	0	...	$\frac{a}{3}$...	a
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

$$S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{3} + a^3\right) = \frac{8}{27} a^3$$

- (3) $0 \leq s \leq t < a$ のとき, 点 $(s, (s-a)^2)$ における接線の方程式は, ①より,

$$y = 2(s-a)x - s^2 + a^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

さて, 2つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の面積を $T(t, s)$ とすると,

- (i) $0 \leq s = t < a$ のとき

$$T(t, s) = S(t) \text{ より, (2) から最大値は } \frac{8}{27} a^3 \text{ である。}$$

- (ii) $0 \leq s < t < a$ のとき

①③を連立すると, $2(t-a)x - t^2 + a^2 = 2(s-a)x - s^2 + a^2$ から,

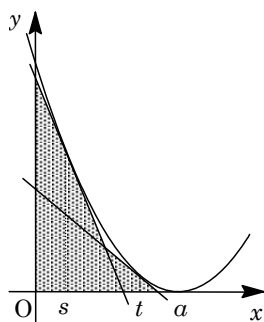
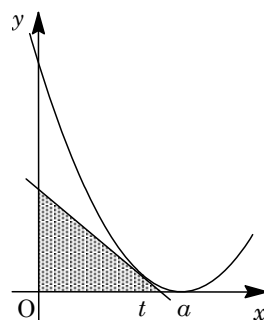
$$2(t-s)x = t^2 - s^2, \quad x = \frac{t+s}{2}$$

よって, $T(t, s) = S(t) + \frac{1}{2} \{(-s^2 + a^2) - (-t^2 + a^2)\} \cdot \frac{t+s}{2}$ となり,

$$T(t, s) = \frac{1}{4} (-t^3 - at^2 + a^2t + a^3) + \frac{1}{4} (t^3 + st^2 - s^2t - s^3) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

ここで, t を $t = t_0$ ($0 < t_0 < a$) で固定し, s を $0 \leq s < t_0$ で動かすと考え,

$$T(t_0, s) = \frac{1}{4} (-t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3) + \frac{1}{4} (t_0^3 + t_0^2s - t_0s^2 - s^3)$$



$$T'(t_0, s) = -\frac{1}{4}(3s^2 + 2t_0s - t_0^2)$$

$$= -\frac{1}{4}(3s - t_0)(s + t_0)$$

s	0	...	$\frac{t_0}{3}$...	t_0
$T'(t_0, s)$		+	0	-	
$T(t_0, s)$		↗		↘	

すると、 $0 \leq s < t_0$ における $T(t_0, s)$ の増減は右表のようになる。これより、 $T(t_0, s)$ は $s = \frac{t_0}{3}$ のとき最大となり、最大値は、

$$T\left(t_0, \frac{t_0}{3}\right) = \frac{1}{4}(-t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3) + \frac{1}{4}\left(t_0^3 + \frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^3}{9} - \frac{t_0^3}{27}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3\right)$$

さらに、この状態を保ったまま t_0 を $0 < t_0 < a$ で動かすと考え、変数を t_0 から t に戻し $U(t) = T\left(t, \frac{t}{3}\right)$ とおき直すと、 $U(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t^3 - at^2 + a^2t + a^3\right)$ から、

$$U'(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2 - 2at + a^2\right)$$

$$= \frac{1}{36}(5t - 3a)(t - 3a)$$

t	0	...	$\frac{3}{5}a$...	a
$U'(t)$		+	0	-	
$U(t)$		↗		↘	

すると、 $0 < t < a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより、 $U(t)$ は $t = \frac{3}{5}a$ のとき最大となり、最大値は、

$$U\left(\frac{3}{5}a\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27} \cdot \frac{27}{125}a^3 - \frac{9}{25}a^3 + \frac{3}{5}a^3 + a^3\right) = \frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より、 $T(t, s)$ は、 $t = \frac{3}{5}a$ 、 $s = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}a = \frac{a}{5}$ のとき、最大値 $\frac{8}{25}a^3$ をとる。

[解説]

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は2変数関数が対象の設定で、1文字を固定して処理しています。ただ、重複をいとわず丁寧に記述したところ、かなりの分量になってしまいました。

4

問題のページへ

- (1) 初項 1, 公差 6 である等差数列 $\{a_n\}$ について, $a_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$
 また, 初項 3, 公差 4 である等差数列 $\{b_m\}$ について, $b_m = 3 + 4(m-1) = 4m - 1$
 ここで, $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とすると, $a_n = b_m$ から,

$$6n - 5 = 4m - 1, \quad 3n - 2m = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ を満たす 1 つの解が } (n, m) = (2, 2) \text{ より, } 3 \times 2 - 2 \times 2 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } 3(n-2) - 2(m-2) = 0, \quad 3(n-2) = 2(m-2)$$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので, j を整数として, $n-2 = 2j$, $m-2 = 3j$ から,

$$n = 2j + 2, \quad m = 3j + 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $m \geq 1$, $n \geq 1$ より $j \geq 0$ となるので, $k = j + 1 \geq 1$ とおくと, $\textcircled{3}$ より,

$$n = 2(k-1) + 2 = 2k, \quad m = 3(k-1) + 2 = 3k - 1$$

よって, $\{c_k\}$ の一般項は, $c_k = a_{2k} = 12k - 5$ である。

- (2) まず, $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_i\}$ とする。ここで, $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$ に注意して, $\{d_i\}$ の d_3 以降を項数 4 のグループに分け, $c_1 = 7$ から 4 項を第 1 群, $c_2 = 19$ から 4 項を第 2 群, $c_3 = 31$ から 4 項を第 3 群, … と呼ぶ。

$$1, 3 \mid \underbrace{7, 11, 13, 15}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{19, 23, 25, 27}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{31, 35, 37, 39}_{\text{第 3 群}} \mid \cdots$$

さて, d_{1000} が第 i 群に属するとすると, $2 + 4(i-1) < 1000 \leq 2 + 4i$ から, $i = 250$ となり, 第 250 群に属する。

さらに, $1000 - (2 + 4 \times 249) = 2$ から, 第 250 群の 2 項目となるので,

$$d_{1000} = c_{250} + 4 = (12 \times 250 - 5) + 4 = 2999$$

また, d_{1001} は第 250 群の 3 項目となるので,

$$d_{1001} = c_{250} + 6 = (12 \times 250 - 5) + 6 = 3001$$

[解説]

2 つの等差数列の共通数列が題材です。(1)は頻出題ですが,(2)はあまり見かけません。解答例では, $\{c_k\}$ に注目し, 群数列の考え方を利用して記しました。