$\boxed{1}$　解答解説のページへ

a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3) s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり, また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$ を α を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x，y の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率 $P(k)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

(1)　次の定積分を求めよ。　$f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt$

(2)　(1)で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ を求めよ。

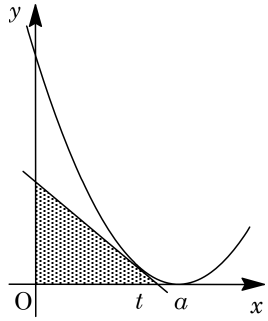
1

問題のページへ

(1)　曲線 $y=(x-a)^2$ に対し $y'=2(x-a)$ となり，$0\leqq t<a$ において，点 $(t,\ (t-a)^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t-a)^2=2(t-a)(x-t)$$

$$y=2(t-a)x-t^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$



すると，①と y 軸との交点は $(0,\ -t^2+a^2)$ となり，また x 軸との交点は $\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$ である。

そこで，接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　②より，$S'(t)=\dfrac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)=-\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

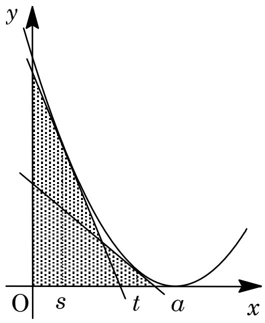
すると，$0\leqq t<a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$ は $t=\dfrac{a}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

t	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$S\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+a^3\right)=\frac{8}{27}a^3$$

(3)　$0\leqq s\leqq t<a$ のとき，点 $(s,\ (s-a)^2)$ における接線の方程式は，①より，

$$y=2(s-a)x-s^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots③$$



さて，2 つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の面積を $T(t,\ s)$ とすると，

(i)　$0\leqq s=t<a$ のとき

$T(t,\ s)=S(t)$ より，(2)から最大値は $\dfrac{8}{27}a^3$ である。

(ii)　$0\leqq s<t<a$ のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\ \ x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\dfrac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\dfrac{t+s}{2}$ となり，

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，t を $t=t_0\ (0<t_0<a)$ で固定し，s を $0\leqq s<t_0$ で動かすと考え，

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}({t_0}^3+{t_0}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

s	0	$\cdots$	$\dfrac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0\leqq s<t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，$T(t_0,\ s)$ は $s=\dfrac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は,

$$T\Big(t_0,\ \frac{t_0}{3}\Big)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\Big({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\Big)$$
$$=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\Big)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\Big(t,\ \dfrac{t}{3}\Big)$ とおき直すと，$U(t)=\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\Big)$ から,

$$U'(t)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\Big)$$
$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより，$U(t)$ は $t=\dfrac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は,

$$U\Big(\frac{3}{5}a\Big)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\Big)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\dfrac{3}{5}a$，$s=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}a=\dfrac{a}{5}$ のとき，最大値 $\dfrac{8}{25}a^3$ をとる。

［解　説］

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。

2　　問題のページへ

(1)　初項 1, 公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また, 初項 3, 公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n=b_m$から,

$6n-5=4m-1$，$3n-2m=2$………①

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m)=(2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2=2$………②

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので, jを整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$から,

$n=2j+2$，$m=3j+2$………③

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$より$j\geqq0$となるので，$k=j+1\geqq1$とおくと, ③より,

$n=2(k-1)+2=2k$，$m=3(k-1)+2=3k-1$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$である。

(2)　まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$に注意して，$\{d_l\}$のd_3以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$から 4 項を第 1 群，$c_2=19$から 4 項を第 2 群, $c_3=31$から 4 項を第 3 群, …と呼ぶ。

$$1,\ 3\ \Big|\ \underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}\ \Big|\ \underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}\ \Big|\ \underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}\ \Big|\ \cdots\cdots$$

さて，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$から，数列$\{d_l\}$の第k群にはc_k，a_{2k+1}，b_{3k}，b_{3k+1}の 4 項が含まれ，$a_{2k+1}=c_k+6$，$b_{3k}=c_k+4$，$b_{3k+1}=c_k+8$より,

$c_k<b_{3k}<a_{2k+1}<b_{3k+1}$

これより，$d_1=1$，$d_2=3$で，$l\geqq3$のd_lに対して，第k群の 4 項は,

$(d_{4k-1},\ d_{4k},\ d_{4k+1},\ d_{4k+2})=(c_k,\ b_{3k},\ a_{2k+1},\ b_{3k+1})$

(i)　$l=4k-1$のとき　$d_l=c_k=12k-5=12\cdot\dfrac{l+1}{4}-5=3l-2$

(ii)　$l=4k$のとき　$d_l=c_k+4=12k-1=12\cdot\dfrac{l}{4}-1=3l-1$

(iii)　$l=4k+1$のとき　$d_l=c_k+6=12k+1=12\cdot\dfrac{l-1}{4}+1=3l-2$

(iv)　$l=4k+2$のとき　$d_l=c_k+8=12k+3=12\cdot\dfrac{l-2}{4}+3=3l-3$

ここで，(iii)に$l=1$をあてはめると$d_1=3\cdot1-2=1$，(iv)に$l=2$をあてはめると$d_2=3\cdot2-3=3$となり，ともに成立している。よって，(i)～(iv)について，lを 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると，d_lは,

$d_l=3l-1\ (l\equiv0)$，$d_l=3l-2\ (l\equiv1,\ 3)$，$d_l=3l-3\ (l\equiv2)$

(3)　i を自然数として，$s_i = d_{4i-3} + d_{4i-2} + d_{4i-1} + d_{4i}$ とおくと，(2)より，

$$s_i = \{12(i-1)+1\} + \{12(i-1)+3\} + (12i-5) + (12i-1) = 48i - 26$$

ここで，p を自然数として，$S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ とすると，

(i)　$l = 4p$ のとき

$$S_l = S_{4p} = \sum_{i=1}^{p} s_i = \sum_{i=1}^{p}(48i-26) = \frac{22+(48p-26)}{2}\cdot p = 2p(12p-1)$$
$$= 2\cdot\frac{l}{4}\left(12\cdot\frac{l}{4}-1\right) = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l$$

(ii)　$l = 4p-1$ のとき

$$S_l = S_{4p-1} = S_{4p} - d_{4p} = 2p(12p-1) - (12p-1) = (2p-1)(12p-1)$$
$$= \left(2\cdot\frac{l+1}{4}-1\right)\left(12\cdot\frac{l+1}{4}-1\right) = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l - 1$$

(iii)　$l = 4p-2$ のとき

$$S_l = S_{4p-2} = S_{4p-1} - d_{4p-1} = (2p-1)(12p-1) - (12p-5)$$
$$= 2p(12p-13) + 6 = 2\cdot\frac{l+2}{4}\left(12\cdot\frac{l+2}{4}-13\right) + 6 = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l - 1$$

(iv)　$l = 4p-3$ のとき

$$S_l = S_{4p-3} = S_{4p-2} - d_{4p-2} = 2p(12p-13) + 6 - \{12(p-1)+3\}$$
$$= 2p(12p-19) + 15 = 2\cdot\frac{l+3}{4}\left(12\cdot\frac{l+3}{4}-19\right) + 15 = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l$$

(i)～(iv)より，l を 4 で割った余りで場合分けをし $\mathrm{mod}\,4$ で記述すると，S_l は，

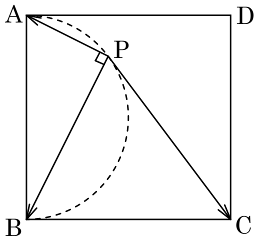
$$S_l = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l\ (l \equiv 0,\ 1),\quad S_l = \frac{3}{2}l^2 - \frac{1}{2}l - 1\ (l \equiv 2,\ 3)$$

［解　説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。記述量はかなりのものです。なお，(2)では(1)の数列 $\{c_k\}$ に注目し，d_1 と d_2 は特別に扱い，d_3 以降を群数列の考え方で処理しています。ただ，この扱いは，結果的には不要だったのですが。

3

問題のページへ



(1)　正方形ABCDの内部の点Pは，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たすので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$より，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdots\cdots\cdots②$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$より$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$となり，①②から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$$

$$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$から$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\{x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}\}=0$となり，①②から，

$$x|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0,\ x-\alpha^2(y-1)=0\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，直線PBに関して，点Aと点Cは反対側にあるので，$x<0\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$$y-1=\pm\frac{1}{\alpha},\ x=\pm\alpha\ （複号同順）$$

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2)　(1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$となる。

ここで，$\alpha>0$から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$となり，

$$x+y\leqq 1-2=-1$$

等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$すなわち$\alpha=1$のときである。

以上より，$x+y$の最大値は-1であり，このとき，②から$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$となり，点Pは正方形ABCDの対角線の交点に位置する。

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので，座標の設定という方法も考えられますが，ここでは①②を利用してx, yの連立方程式を立てるという方針で記しました。

4　問題のページへ

もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき，金，銀，白である確率は，それぞれ$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{n-2}{n}$である。そして，金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，その合計点を考える。

さて，k回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，次の(a), (b)の場合がある。

(a)　$k-1$回目までの合計点が 50 点で，k回目に金という場合

(a-i)　$1\leqq k-1\leqq 4\ (2\leqq k\leqq 5)$のとき

$k-1$回目までは，金が 1 回，白が$k-2$回となり，その確率は，

$$ {}_{k-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^{k-2}\times\frac{1}{n}=\frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$$

(a-ii)　$k-1\geqq 5\ (k\geqq 6)$のとき

$k-1$回目までは，金が 1 回，白が$k-2$回，または銀が 5 回，白が$k-6$回となり，その確率は，

$$ {}_{k-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^{k-2}\times\frac{1}{n}+{}_{k-1}\mathrm{C}_5\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^{k-6}\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_5(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

(b)　$k-1$回目までの合計点が 90 点で，k回目に銀という場合

(b-i)　$5\leqq k-1\leqq 8\ (6\leqq k\leqq 9)$のとき

$k-1$回目までは，金が 1 回，銀が 4 回，白が$k-6$回となり，その確率は，

$$ {}_{k-1}\mathrm{C}_1\,{}_{k-2}\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^{k-6}\times\frac{1}{n}=\frac{{}_{k-2}\mathrm{C}_4(k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

(b-ii)　$k-1\geqq 9\ (k\geqq 10)$のとき

$k-1$回目までは，金が 1 回，銀が 4 回，白が$k-6$回，または銀が 9 回，白が$k-10$回となり，その確率は，

$$ {}_{k-1}\mathrm{C}_1\,{}_{k-2}\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^{k-6}\times\frac{1}{n}+{}_{k-1}\mathrm{C}_9\Big(\frac{1}{n}\Big)^9\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^{k-10}\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{{}_{k-2}\mathrm{C}_4(k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_9(n-2)^{k-10}}{n^k}$$

(a)(b)より，k回目に合計点がはじめて 100 点となる確率$P(k)$は，

(i)　$k=1$のとき　$P(k)=0$

(ii)　$2\leqq k\leqq 5$のとき　(a-i)より，$P(k)=\dfrac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$

(iii)　$6\leqq k\leqq 9$のとき　(a-ii)および(b-i)より，

$$P(k)=\frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_5(n-2)^{k-6}}{n^k}+\frac{{}_{k-2}\mathrm{C}_4(k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

ここで，${}_{k-2}\mathrm{C}_4(k-1)=\dfrac{(k-1)!}{4!(k-6)!}=5\cdot\dfrac{(k-1)!}{5!(k-6)!}=5\,{}_{k-1}\mathrm{C}_5$ となるので，

$$P(k)=\frac{(k-1)(n-2)^{k-2}+(1+5)\,{}_{k-1}\mathrm{C}_5(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

$$=\frac{(n-2)^{k-6}}{n^k}\left\{(k-1)(n-2)^4+6\,{}_{k-1}\mathrm{C}_5\right\}$$

(iv)　$k\geqq 10$ のとき　(a-ii)および(b-ii)より，

$$P(k)=\frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}+\frac{(1+5)\,{}_{k-1}\mathrm{C}_5(n-2)^{k-6}}{n^k}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_9(n-2)^{k-10}}{n^k}$$

$$=\frac{(n-2)^{k-10}}{n^k}\left\{(k-1)(n-2)^8+6\,{}_{k-1}\mathrm{C}_5(n-2)^4+{}_{k-1}\mathrm{C}_9\right\}$$

［解　説］

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので，その 1 回手前の状態に着目しています。ただ，記述量はかなりのもので，忍耐力の勝負になります。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) $f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt=e^{-x}\int_0^x e^t\sin(t+x)\,dt$

ここで，$\left(e^t\sin(t+x)\right)'=e^t\sin(t+x)+e^t\cos(t+x)\cdots\cdots\cdots①$

$\left(e^t\cos(t+x)\right)'=e^t\cos(t+x)-e^t\sin(t+x)\cdots\cdots\cdots②$

①－②より，$\left(e^t\sin(t+x)-e^t\cos(t+x)\right)'=2e^t\sin(t+x)$となり，

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{2}\Big[e^t\sin(t+x)-e^t\cos(t+x)\Big]_0^x$$

$$=\frac{e^{-x}}{2}(e^x\sin 2x-e^x\cos 2x-\sin x+\cos x)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)$$

(2) $f(0)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ となり, (1)から,

$$f'(x)=\cos 2x+\sin 2x+\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x+\sin x)$$

$$=\cos 2x+\sin 2x-e^{-x}\cos x$$

これより，$f'(0)=1+0-1\cdot 1=0$ となるので，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ である。

［解　説］

定積分の計算と極限の融合問題です。(2)は微分係数の定義式に着目する点がポイントです。式変形だけでも極限は求まりますが，この場合も同様に定義式が絡みます。