1　解答解説のページへ

正の約数の個数がちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。

(1)　d_5 を求めよ。

(2)　d_{15} を求めよ。

2

解答解説のページへ

コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, B いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

3　解答解説のページへ

三角形 ABC において $\angle A = 45^\circ$，$\angle B = 60^\circ$ である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし，頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また，$\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{CE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき，$\overrightarrow{CH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a は 0 でない実数とし，$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフ C と導関数 $y=f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　p_1，p_2，p_3，$\cdots$ $(2 \leqq p_1 < p_2 < p_3 < \cdots)$ を素数，a_1，a_2，a_3，$\cdots$ を 0 以上の整数として，自然数 n を $n = {p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}{p_3}^{a_3}\cdots$ とおく。

このとき，正の約数の個数は，$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots$ となる。

さて，正の約数が 5 個となるのは，$a_1+1=5$，$k \geqq 2$ で $a_k+1=1$ のときで，

$$n = {p_1}^4$$

すると，$p_1 = 5$ のとき $n = 5^4 = 625$，$p_1 = 7$ のとき $n = 7^4 = 2401$ なので，1900 以上の自然数の中で最小のもの d_5 は，$d_5 = 2401$ となる。

(2)　正の約数が 15 個となるのは，次の場合がある。

(i)　$a_1+1=15$，$k \geqq 2$ で $a_k+1=1$ のとき　自然数 n は $n = {p_1}^{14}$

このとき，1900 以上の自然数の中で最小のものは $n = 2^{14} = 16384$ である。

(ii)　$a_1+1=5$，$a_2+1=3$，$k \geqq 3$ で $a_k+1=1$ のとき　自然数 n は $n = {p_1}^4{p_2}^2$

このとき，1900 以上の自然数の中で最小のものを $p_1 = 2,\ 3,\ \cdots$ として調べると，

$$2^4\cdot 7^2 = 784,\ 2^4\cdot 11^2 = 1936,\ 3^4\cdot 5^2 = 2025,\ \cdots$$

すると，$1936 < 2025$ より，$n = 1936$ である。

(iii)　$a_1+1=3$，$a_2+1=5$，$k \geqq 3$ で $a_k+1=1$ のとき　自然数 n は $n = {p_1}^2{p_2}^4$

このとき，1900 以上の自然数の中で最小のものを $p_1 = 2,\ 3,\ \cdots$ として調べると，

$$2^2\cdot 3^4 = 324,\ 2^2\cdot 5^4 = 2500,\ 3^2\cdot 5^4 = 5625,\ \cdots$$

すると，$2500 < 5625$ より，$n = 2500$ である。

(i)～(iii)より，1900 以上の自然数の中で最小のもの d_{15} は，$d_{15} = 1936$ となる。

［解　説］

自然数の約数の個数についての問題です。基本的な内容ですが，数値計算はやや多めです。

2

問題のページへ

(1)　条件より，さいころを 1 回振ってコインを 1 枚，箱 A，箱 B，箱 C に入れる確率は，それぞれ $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{3}{6}$ である。

さて，さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインがそれぞれ 2 枚，2 枚，1 枚入っている確率は，

$$\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot2^2\cdot3}{6^5}=\frac{5}{108}$$

(2)　さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B にコインが少なくとも 1 枚入っている事象をそれぞれ A，B とし，その確率を $P(A)$，$P(B)$ とおくと，

$$P(\overline{A})=\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{5}{6}\right)^5,\ P(\overline{B})=\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{4}{6}\right)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^5$$

すると，箱 A，箱 B いずれにもコインが 1 枚以上入っている確率は，

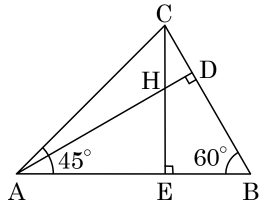
$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5-\left(\frac{4}{6}\right)^5+\left(\frac{3}{6}\right)^5\\&=1-\frac{3125+1024-243}{6^5}=1-\frac{3906}{6^5}=1-\frac{217}{432}=\frac{215}{432}\end{aligned}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(2)は余事象の確率と和事象の確率を組み合わせた有名な解法で記述しました。ただ，数値計算は面倒でしたが。

3

問題のページへ



(1)　$\angle A=45°$，$\angle B=60°$ の $\triangle ABC$ において，正弦定理より，

$$\frac{CA}{\sin 60°}=\frac{CB}{\sin 45°},\quad \frac{CA}{\sqrt{3}}=\frac{CB}{\sqrt{2}}$$

これより，$CA=\sqrt{3}l$，$CB=\sqrt{2}l$ $(l>0)$ とおけ，

$$AE=\sqrt{3}l\cos 45°=\frac{\sqrt{6}}{2}l,\quad BE=\sqrt{2}l\cos 60°=\frac{\sqrt{2}}{2}l$$

すると，$AE:BE=\sqrt{6}:\sqrt{2}=\sqrt{3}:1$ となり，$\vec{a}=\overrightarrow{CA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{CE}=\frac{\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\vec{b}$$

(2)　$\angle BAD=90°-60°=30°$ となり，$HE=AE\tan 30°=\frac{\sqrt{6}}{2}l\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}l$

また，$CE=AE\tan 45°=\frac{\sqrt{6}}{2}l$ なので，$HE:CE=\sqrt{2}:\sqrt{6}=1:\sqrt{3}$ となり，

$$\overrightarrow{CH}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{CE}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}(\vec{a}+\sqrt{3}\vec{b})$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\vec{a}+(2-\sqrt{3})\vec{b}$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用についての基本題です。内積などの数式処理でも結論を導けますが，ここでは図形的に解きました。なお，上記の解答例で，$l=1$ として計算しても構いません。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3\ (a\neq 0)$ に対して，$f'(x)=3ax^2+6ax+3$

ここで，$C: y=f(x)$ と $C': y=f'(x)$ を連立して，

$$ax^3+3ax^2+3x+3=3ax^2+6ax+3,\ ax^3-3(2a-1)x=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$x\{ax^2-3(2a-1)\}=0$ より，$x=0$ または $ax^2-3(2a-1)=0\ \cdots\cdots\cdots②$

C と C' が相異なる 3 点で交わる条件は，②が $x\neq 0$ の 2 実数解をもつことより，

$$\frac{3(2a-1)}{a}>0,\ a(2a-1)>0$$

よって，求める a の範囲は，$a<0$，$\frac{1}{2}<a$ である。

(2)　$a<0$，$\frac{1}{2}<a$ のとき，$\alpha=\sqrt{\frac{3(2a-1)}{a}}$ とおくと，①の解は $x=0,\ \pm\alpha$ となる。

ここで，$F(x)=\int\{f(x)-f'(x)\}dx$ とおくと，

$$F(x)=\int\{ax^3-3(2a-1)x\}dx=\frac{a}{4}x^4-\frac{3}{2}(2a-1)x+C\ （C は定数）$$

$C=0$ のとき，$F(0)=0$ となり，

$$F(\alpha)=F(-\alpha)=\frac{a}{4}\cdot\frac{9(2a-1)^2}{a^2}-\frac{3}{2}(2a-1)\cdot\frac{3(2a-1)}{a}=-\frac{9(2a-1)^2}{4a}$$

さて，C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S は，

(i)　$a<0$ のとき

$-\alpha\leqq x\leqq 0$ において $f'(x)\geqq f(x)$，$0\leqq x\leqq\alpha$ において $f'(x)\leqq f(x)$ より，

$$S=\int_{-\alpha}^{0}\{f'(x)-f(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-f'(x)\}dx$$

$$=-F(0)+F(-\alpha)+F(\alpha)-F(0)=2F(\alpha)=-\frac{9(2a-1)^2}{2a}$$

(ii)　$a>\frac{1}{2}$ のとき

$-\alpha\leqq x\leqq 0$ において $f'(x)\leqq f(x)$，$0\leqq x\leqq\alpha$ において $f'(x)\geqq f(x)$ より，

$$S=\int_{-\alpha}^{0}\{f(x)-f'(x)\}dx+\int_{0}^{\alpha}\{f'(x)-f(x)\}dx$$

$$=F(0)-F(-\alpha)-F(\alpha)+F(0)=-2F(\alpha)=\frac{9(2a-1)^2}{2a}$$

［解 説］

定積分と面積についての問題です。(2)では，計算がやや繁雑なので，原始関数を予め求めておきました。