1

解答解説のページへ

$a_1=3$，$a_2=2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $n \geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。

2　解答解説のページへ

三角形 ABC は AB＋AC＝2BC を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD＝15 である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \angle \mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A = \angle \mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。

3

解答解説のページへ

コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A，B，C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1)　箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2)　A, B, C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3)　試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標平面上の円 C は，点$(0,\ 0)$を通り，中心が直線 $x+y=0$ 上にあり，さらに双曲線 $xy=1$ と接する。このとき，円 C の方程式を求めよ。ただし，円と双曲線がある点で接するとは，その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

n を正の整数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2}\theta d\theta$ を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7\theta d\theta$ を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$a_1=3$，$a_2=2$，$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n-1\ (n\geqq 2)$ ……①で定められる$\{a_n\}$に対して，

$$a_{n+1}+1=a_n(a_n+1)\quad (n\geqq 2)\cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$n\geqq 2$ において，

$$a_{n+1}+1=(a_2+1)a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=3\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$$

よって，$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ ……③が成り立つ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，①より，$a_n{}^2=a_{n+1}-a_n+1$ となり，③を利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1{}^2+\sum_{i=2}^{n}a_i{}^2=3^2+\sum_{i=2}^{n}(a_{i+1}-a_i+1)=9+a_{n+1}-a_2+(n-1)$$
$$=9+(a_1a_2\cdots a_n-1)-2+n-1=a_1a_2\cdots a_n+n+5$$

ここで，条件より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ ……④なので，

$$a_1a_2\cdots a_n+n+5=a_1a_2\cdots a_n+100,\quad n+5=100$$

よって，$n=95$ となり，この値は$n\geqq 2$ を満たしている。

なお，$n=1$ のとき，条件④は $3^2=3+100$ となり，成立しない。

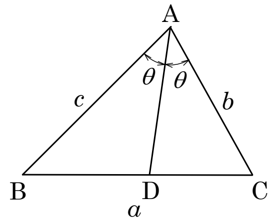
［解 説］

少しスパイスの効いた漸化式が対象です。(1)は数学的帰納法でも示せますが，結論をみて②という変形をしています。解法の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

© 電送数学舎 2019

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC に対して，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおく。また，$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D として，

$$b+c=2a\cdots\cdots\cdots①,\ \ \mathrm{AD}=15\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\triangle$ABC は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot 4=2\cdot 3a=6a\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot\mathrm{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot 15\sin\theta=15a\sin\theta\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{4}{25}=\dfrac{17}{25}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2)　⑥より，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\ \ bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\cdots⑦$$

また，$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\dfrac{84}{25}\cdot\dfrac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

$$\mathrm{BC}=a=4\sqrt{21}$$

［解　説］

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

© 電送数学舎 2019

3

問題のページへ

(1)　条件より，さいころを 1 回振ってコインを 1 枚，箱 A，箱 B，箱 C に入れる確率は，それぞれ$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{3}{6}$である。

さて，さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインがそれぞれ 2 枚，2 枚，1 枚入っている確率は，

$$\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{3}{6}=\frac{2\cdot3\cdot5\cdot2^2\cdot3}{6^5}=\frac{5}{108}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　さいころを 5 回振ったとき，箱 A，箱 B，箱 C にコインが少なくとも 1 枚入っている事象をそれぞれA，B，Cとし，その確率を$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$とおくと，

$$P(\overline{A})=\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{5}{6}\right)^5,\ P(\overline{B})=\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\right)^5=\left(\frac{4}{6}\right)^5$$

$$P(\overline{C})=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)^5=\left(\frac{3}{6}\right)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^5,\ P(\overline{B}\cap\overline{C})=\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$P(\overline{C}\cap\overline{A})=\left(\frac{2}{6}\right)^5,\ P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=0$$

すると，箱 A，箱 B，箱 C いずれにもコインが 1 枚以上入っている確率は，

$$P(A\cap B\cap C)=1-P(\overline{A\cap B\cap C})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$の値は，

$$P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(\overline{B}\cap\overline{C})-P(\overline{C}\cap\overline{A})+P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^5+\left(\frac{4}{6}\right)^5+\left(\frac{3}{6}\right)^5-\left(\frac{3}{6}\right)^5-\left(\frac{1}{6}\right)^5-\left(\frac{2}{6}\right)^5+0=\frac{4116}{6^5}=\frac{343}{648}$$

よって，②より，$P(A\cap B\cap C)=1-\dfrac{343}{648}=\dfrac{305}{648}$

(3)　さいころを 5 回振ったとき，コインが箱 A に 2 枚入っているのは，箱 B または C には 3 枚入っていることなので，その確率は，

$$\frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)^3=\frac{2\cdot5\cdot5^3}{6^5}=\frac{2\cdot5^4}{6^5}$$

すると，箱 A に 2 枚のコインが入っていたとき，箱 B にもコインが 2 枚入っている条件付き確率は，①を利用して，

$$\frac{5}{108}\div\frac{2\cdot5^4}{6^5}=\frac{5}{3\cdot6^2}\cdot\frac{6^5}{2\cdot5^4}=\frac{6^2}{5^3}=\frac{36}{125}$$

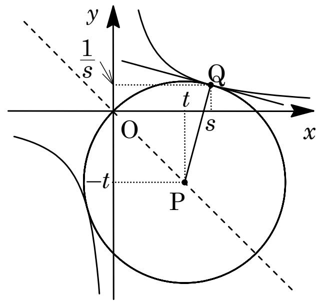
［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)は余事象の確率と和事象の確率を組み合わせた有名な解法で記述しました。

© 電送数学舎 2019

4

問題のページへ



円 C は中心が直線 $x+y=0$ 上にあるので，これを $\mathrm{P}(t,\ -t)$ とおくと，半径は $\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+(-t)^2}=\sqrt{2}|t|$ となり，その方程式は，

$$(x-t)^2+(y+t)^2=2t^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$x^2+y^2-2tx+2ty=0 \cdots\cdots\cdots ①'$$

ここで，C と双曲線 $xy=1$ すなわち $y=\dfrac{1}{x}$ ……②との接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$ とおくと，Q は①′上にあることより，

$$s^2+\frac{1}{s^2}-2t\left(s-\frac{1}{s}\right)=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，線分 PQ の傾きは，$s\neq t$ で $\dfrac{\frac{1}{s}+t}{s-t}=\dfrac{1+st}{s(s-t)}$ となり，また②より $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ から，Q における接線の傾きは $-\dfrac{1}{s^2}$ である。

そこで，Q における双曲線の接線と線分 PQ が垂直であることより，

$$\frac{1+st}{s(s-t)}\cdot\left(-\frac{1}{s^2}\right)=-1,\ 1+st=s^4-s^3t,\ s(s^2+1)t=(s^2+1)(s^2-1)$$

よって，$t=\dfrac{s^2-1}{s}=s-\dfrac{1}{s}$ ……④となり，この式は $s\neq t$ を満たす。

④を③に代入すると，$s^2+\dfrac{1}{s^2}-2\left(s-\dfrac{1}{s}\right)^2=0$ となり，$s^2+\dfrac{1}{s^2}-4=0$ から，

$$s^4-4s^2+1=0,\ s^2=2\pm\sqrt{3}$$

(i)　$s^2=2+\sqrt{3}$ のとき　$s=\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ となり，④より，複号同順で，

$$t=\pm(2+\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\pm\sqrt{2}$$

(ii)　$s^2=2-\sqrt{3}$ のとき　$s=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ となり，④より，複号同順で，

$$t=\pm(2-\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\mp\sqrt{2}$$

(i)(ii)より，$t=\sqrt{2},\ -\sqrt{2}$ となり，円 C の方程式は，①から，

$$(x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4,\ (x+\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$$

［解 説］

円の中心と接点を設定して，その結果として得られる連立方程式③④を解いて結論という流れです。ただ，計算はやや繁雑でした。

© 電送数学舎 2019

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta\,d\theta$ とおくと，$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^{n+2}\theta\,d\theta$ となり，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan^n\theta+\tan^{n+2}\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\left[\frac{\tan^{n+1}\theta}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{n+1}=\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$$

(2)　(1)より，$I_7=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^7\theta\,d\theta$ となり，$I_{n+2}=-I_n+\dfrac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

すると，$I_7=-I_5+\dfrac{3^3}{6}=-I_5+\dfrac{9}{2}$，$I_5=-I_3+\dfrac{3^2}{4}=-I_3+\dfrac{9}{4}$

$$I_3=-I_1+\frac{3^1}{2}=-I_1+\frac{3}{2}$$

ここで，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\,d\theta$ の値を求めると，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta=-\Big[\log|\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\log\frac{1}{2}-\log 1=\log 2$$

すると，$I_3=-\log 2+\dfrac{3}{2}$，$I_5=\log 2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}=\log 2+\dfrac{3}{4}$ となり，

$$I_7=-\log 2-\frac{3}{4}+\frac{9}{2}=-\log 2+\frac{15}{4}$$

［解　説］

漸化式を立て，それをもとに定積分の値を求める頻出題です。ただ，本問は誘導つきですので，考え込むことはないでしょう。

©　電送数学舎　2019