

1

解答解説のページへ

Aさんは1が書かれたカードを1枚, 2が書かれたカードを2枚, 4が書かれたカードを1枚, 計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数 X を作る。Bさんは2が書かれたカードを2枚, 3が書かれたカードを2枚, 計4枚を無作為に横一列に並べて4桁の数 Y を作る。

- (1) X が4の倍数となる確率を求めよ。
- (2) $X < Y$ となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

k を定数とし、 $f(x) = x^3 - kx$ とおく。曲線 $C: y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $P(a, f(a))$ をとる。点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち、傾きが大きい方を l_1 、小さい方を l_2 とする。さらに、 C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1 、 C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。 l_1 および l_2 の方程式と、 Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に 4 点 $P_0(2, 0)$, $P_1(0, 2)$, $Q_0(0, 0)$, $Q_1(-1, 1)$ がある。正の整数 n に対し、点 P_n , Q_n まで定まったとき、点 P_{n+1} , Q_{n+1} を以下の条件で定める。

四角形 $P_n P_{n+1} Q_{n+1} Q_n$ と四角形 $P_{n-1} P_n Q_n Q_{n-1}$ は相似であり、かつ辺 $P_n Q_n$ のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) P_2 , Q_2 の座標を求めよ。
- (2) P_4 , P_8 の座標を求めよ。
- (3) 正の整数 m に対して、 P_{8m} の座標を m の式で表せ。

1

問題のページへ

- (1) 同じ数字の書かれたカードも区別して, $1, 2_a, 2_b, 4$ と書かれたカード 4 枚を横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。

このとき, X が 4 の倍数となるのは, 下 2 桁が 4 の倍数である, すなわち下 2 桁が 12 または 24 の場合より,

(i) 下 2 桁が 12 のとき この確率は, $\frac{1 \times 2 \times 2!}{4!} = \frac{1}{6}$ である。

(ii) 下 2 桁が 24 のとき この確率は, $\frac{2 \times 1 \times 2!}{4!} = \frac{1}{6}$ である。

(i)(ii)より, X が 4 の倍数となる確率は, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ である。

- (2) (1)と同様に, 同じ数字の書かれたカードも区別して, $2_a, 2_b, 3_a, 3_b$ と書かれたカード 4 枚を横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

このとき, $X < Y$ となるのは, $2233 \leq Y \leq 3322$ に注意し, X の千の位の数で場合分けをすると,

- (i) X の千の位の数が 1 ($X = 1***$) のとき

つねに $X < Y$ が成り立ち, この確率は, $\frac{1 \times 3!}{4!} \times 1 = \frac{1}{4}$ である。

- (ii) X の千の位の数が 2 ($X = 2***$) のとき

- (ii-i) X の百の位の数が 1 ($X = 21**$) のとき

つねに $X < Y$ が成り立ち, この確率は, $\frac{2 \times 1 \times 2!}{4!} \times 1 = \frac{1}{6}$ である。

- (ii-ii) X の百の位の数が 2 ($X = 22**$) のとき

・ $X = 2214$ のとき つねに $X < Y$ が成り立つ。

・ $X = 2241$ のとき $Y \neq 2233$ のとき $X < Y$ が成り立つ。

この確率は, $\frac{2 \times 1 \times 1}{4!} \times 1 + \frac{2 \times 1 \times 1}{4!} \times \frac{4! - 2! \times 2!}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{5}{72} = \frac{11}{72}$ である。

- (ii-iii) X の百の位の数が 4 ($X = 24**$) のとき

$Y = 3***$ で $X < Y$ が成り立ち, この確率は, $\frac{2 \times 1 \times 2!}{4!} \times \frac{2 \times 3!}{4!} = \frac{1}{12}$ である。

- (iii) X の千の位の数が 4 ($X = 4***$) のとき

つねに $X > Y$ となり, この場合, $X < Y$ は成り立たない。

(i)~(iii)より, $X < Y$ となる確率は, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{11}{72} + \frac{1}{12} = \frac{47}{72}$ である。

[解説]

丁寧な処理が必要な確率問題です。なお, 解答例では, すべてのカードが異なるものとして数え上げました。

2

問題のページへ

k を定数とする $f(x) = x^3 - kx$ に対して、曲線 $C: y = f(x)$ とちょうど 2 点を共有する直線は、 C の接線である。そこで、点 $(t, t^3 - kt)$ における接線の方程式は、 $f'(x) = 3x^2 - k$ から、

$$y - (t^3 - kt) = (3t^2 - k)(x - t)$$

$$y = (3t^2 - k)x - 2t^3 \cdots \cdots (*)$$

$y = f(x)$ と (*) を連立すると、 $x^3 - kx = (3t^2 - k)x - 2t^3$ から、

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0, \quad (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

共有点の x 座標は $x = t, -2t$ となり、その 1 つが $P(a, f(a))$ ($a \neq 0$) なので、

(i) $a = t$ ($t = a$) のとき

(*) から、接線の方程式は $y = (3a^2 - k)x - 2a^3$ となり、もう 1 つの共有点の x 座標 $x = -2t = -2a$ である。

(ii) $a = -2t$ ($t = -\frac{a}{2}$) のとき

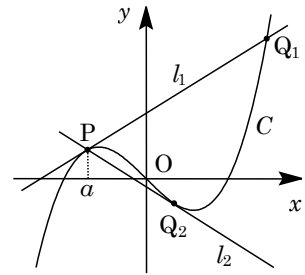
(*) から、接線の方程式は $y = (\frac{3}{4}a^2 - k)x + \frac{a^3}{4}$ となり、もう 1 つの共有点の x 座標 $x = t = -\frac{a}{2}$ である。

ここで、 $a \neq 0$ なので、 $3a^2 - k > \frac{3}{4}a^2 - k$ となり、

$$l_1: y = (3a^2 - k)x - 2a^3, \quad l_2: y = (\frac{3}{4}a^2 - k)x + \frac{a^3}{4}$$

また、 Q_1 については $x = -2a$ 、 $y = -8a^3 + 2ka$ から $Q_1(-2a, -8a^3 + 2ka)$ となり、

Q_2 については $x = -\frac{a}{2}$ 、 $y = -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2}$ から $Q_2(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2})$ である。



[解説]

3 次曲線の接線についての頻出題です。恒等式で処理する方法もありますが。なお、上の参考図は、 $k > 0$ 、 $a < 0$ の場合を記しています。

3

問題のページへ

(1) 4点 $P_0(2, 0)$, $P_1(0, 2)$, $Q_0(0, 0)$, $Q_1(-1, 1)$

に対して, 四角形 $P_1P_2Q_2Q_1$ は四角形 $P_0P_1Q_1Q_0$ と相似であり, かつ辺 P_1Q_1 のみを共有している。

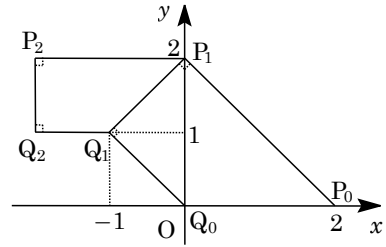
ここで, $\angle Q_1P_1P_2 = \angle Q_0P_0P_1 = 45^\circ$ であり,

$$\angle P_1Q_1Q_2 = \angle P_0Q_0Q_1 = 135^\circ$$

また, $P_1Q_1 = \sqrt{2}$, $P_0Q_0 = 2$ から, その相似比は $\sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}$ であり,

$$P_1P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} P_0P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} = 2, \quad Q_1Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_0Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

したがって, $P_2(-2, 2)$, $Q_2(-2, 1)$ となる。



(2) (1)と同様に, 相似な四角形を描いていく

と, 右図のようになり,

$$P_2P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} P_1P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}$$

$$P_3P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} P_2P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 1$$

すると, P_4 の x 座標は $-2 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$,

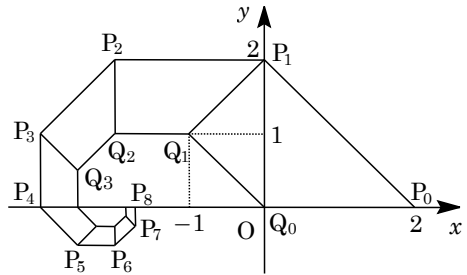
y 座標は $2 - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 0$ となり, $P_4(-3, 0)$ である。

さらに, $P_4P_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_5P_6 = \frac{1}{2}$, $P_6P_7 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $P_7P_8 = \frac{1}{4}$ なので, $P_8(x, y)$ は,

$$x = -3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$y = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

これより, $P_8(-\frac{7}{4}, 0)$ となる。



(3) 右図の網点部で示した P_0Q_0 からの 8 つの

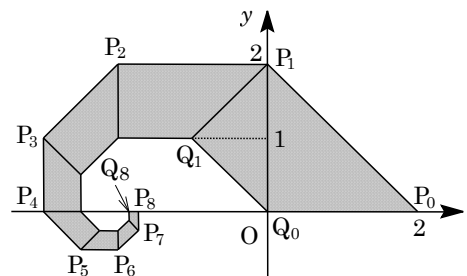
台形の集まりを F_0 , 同様に P_8Q_8 からの 8 つの

台形の集まりを F_1 , $P_{16}Q_{16}$ からの 8 つの

台形の集まりを F_2 として描いていくと, F_0 ,

F_1 , F_2 , ... はすべて相似で, その相似比の

値は, それぞれ $(\frac{1}{\sqrt{2}})^8 = \frac{1}{16}$ である。



さて, P_{8m} ($m \geq 0$) は x 軸上にあり, その x 座標を x_m とおくと, (2) から,

$$x_0 = 2, \quad x_1 = -\frac{7}{4}, \quad x_{m+2} - x_{m+1} = \frac{1}{16}(x_{m+1} - x_m)$$

すると, $x_{m+1} - x_m = (x_1 - x_0)\left(\frac{1}{16}\right)^m = -\frac{15}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^m$ となり, $m \geq 1$ で,

$$\begin{aligned} x_m &= x_0 - \frac{15}{4} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{16}\right)^k = 2 - \frac{15}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^m}{1 - \frac{1}{16}} = 2 - 4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16}\right)^m \right\} \\ &= 4 \left(\frac{1}{16}\right)^m - 2 \end{aligned}$$

また, P_{8m} の y 座標は 0 なので, $P_{8m} \left(4 \left(\frac{1}{16}\right)^m - 2, 0 \right)$ である。

[解説]

数列の図形への応用問題です。理系なら複素数平面を設定して, 少し前なら行列を利用して明快に記述できる典型題ですが, どちらも採用できないので, 説明の方法に戸惑いを感じます。