

1

解答解説のページへ

$t$  を実数とし、不等式

$$(x^2 - 2x + y^2)(x^2 - 3x + y^2) \leq 0, \quad t \leq x \leq t+1$$

の表す  $xy$  平面上の領域を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V(t)$  とする。

$t$  が  $1 \leq t \leq 2$  の範囲を動くとき、 $V(t)$  の最大値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

四面体  $ABCD$  において、 $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$ 、 $\angle ADB = 90^\circ$  が成り立っている。三角形  $ABC$  の重心を  $G$  とする。

- (1)  $\angle BDC$  を求めよ。
- (2)  $\frac{\sqrt{AB^2 + CD^2}}{DG}$  の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。 $n$  回目に取り出したカードに書かれた整数を  $a_n$  とし、 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  とする。 $n$  回目に初めて  $S_n$  が 3 の倍数になる確率を  $p_n$  とする。

- (1)  $p_2, p_3$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  のとき、 $p_n$  を求めよ。
- (3)  $n \geq 4$  とする。 $S_1, S_2, S_3$  が 3 の倍数でなく  $a_3 = 5$  であったとき、 $n$  回目に初めて  $S_n$  が 3 の倍数になる条件付き確率  $q_n$  を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a$  は 0 でない定数とする。2 つの放物線  $y = x^2$  と  $x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4}$  の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような  $a$  の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数平面上で複素数  $0$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}+i$  を表す点をそれぞれ  $A_1$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  とする。正の整数  $n$  に対して、点  $A_{n+1}$  は線分  $A_n B_n$  の中点とし、点  $B_{n+1}$  は直線  $A_n B_n$  に関して点  $B_{n-1}$  の反対側にあり、三角形  $A_{n+1} B_n B_{n+1}$  が三角形  $A_1 B_0 B_1$  と相似になるものとする。点  $A_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) が表す複素数を  $z_n$  とする。

- (1) 複素数  $z_3$  を求めよ。
- (2) 複素数  $z_6$  を求めよ。
- (3) 正の整数  $m$  に対して、複素数  $z_{6m}$  の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

1

問題のページへ

不等式  $(x^2 - 2x + y^2)(x^2 - 3x + y^2) \leq 0$  に対して,

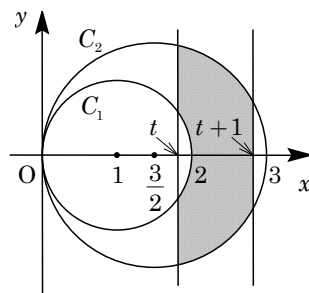
$$\{(x-1)^2 + y^2 - 1\} \left\{ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} \right\} \leq 0 \dots\dots ①$$

領域①に対して, その境界線を  $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ ,

$$C_2 : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

とす。また, 不等式  $t \leq x \leq t+1$

( $1 \leq t \leq 2$ )  $\dots\dots ②$  に対して, ①かつ②で表される領域を図示すると, 右図の網点部になる。



さて, この網点部を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V(t)$  とすると,

$$C_1 : y^2 = 1 - (x-1)^2 = -x^2 + 2x, \quad C_2 : y^2 = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -x^2 + 3x \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_t^{t+1} (-x^2 + 3x) dx - \pi \int_t^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \pi \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \right]_t^{t+1} - \pi \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_t^2 \\ &= \pi \left\{ -\frac{1}{3}(3t^2 + 3t + 1) + \frac{3}{2}(2t + 1) + \frac{1}{3}(8 - t^3) - (4 - t^2) \right\} \\ &= \pi \left( -\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

これより,  $V'(t) = \pi(-t^2 + 2)$  となり,  $1 \leq t \leq 2$  における  $V(t)$  の増減は右表のようになる。すると,  $V(t)$  の最大値は,

$t$	1	...	$\sqrt{2}$	...	2
$V'(t)$		+	0	-	
$V(t)$		↗		↘	

$$V(\sqrt{2}) = \left( -\frac{2}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \frac{1}{6} \right) \pi = \left( \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{6} \right) \pi$$

[解説]

回転体の体積を題材とした微積分の総合問題です。計算は標準的なものです。

2

問題のページへ

(1) 四面体 ABCD において、 $\angle ADB = 90^\circ$  より、

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \cdots \cdots (*)$$

条件より、 $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$  なので、(\*)から、

$$AD^2 + BD^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

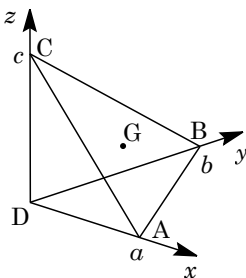
すると、 $BD^2 + CD^2 = BC^2$ 、 $AD^2 + CD^2 = AC^2$  となり、

$$\angle BDC = 90^\circ, \angle ADC = 90^\circ$$

(2)  $DA = a$ 、 $DB = b$ 、 $DC = c$  とすると、(1)から、 $D(0, 0, 0)$ として、 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, b, 0)$ 、 $C(0, 0, c)$  とおくことができる。すると、 $\triangle ABC$  の重心は  $G\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$  となり、

$$\sqrt{AB^2 + CD^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + c^2}$$

$$DG = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

よって、 $\frac{\sqrt{AB^2 + CD^2}}{DG} = 3$  である。

## 【解説】

図形の計量の問題です。ポイントは三平方の定理(\*)だけで、これによって、座標系の設定という方針が、自然に湧き出てくると思われます。

3

問題のページへ

(1) 1 から 5 までカードが 1 枚ずつ入っている袋の中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返し、 $n$  回目に取り出したカードに書かれた整数を  $a_n$  とする。

すると、以下、 $\text{mod } 3$  で記すと、 $a_n \equiv 0$  となる確率は  $\frac{1}{5}$ 、 $a_n \equiv 1$  となる確率は  $\frac{2}{5}$ 、 $a_n \equiv 2$  となる確率は  $\frac{2}{5}$  である。そして、 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  とするとき、 $n$  回目に初めて  $S_n$  が 3 の倍数になる確率を  $p_n$  とする。

まず、 $S_2 = a_1 + a_2$  が初めて 3 の倍数になるのは、 $a_1 \equiv 1$  のときは  $a_2 \equiv 2$  のときだけ、 $a_1 \equiv 2$  のときは  $a_2 \equiv 1$  のときだけであるので、

$$p_2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$$

次に、 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$  が初めて 3 の倍数になるのは、 $a_1 \equiv 1$  のときは、( $a_2 \equiv 0$  かつ  $a_3 \equiv 2$ ) または ( $a_2 \equiv 1$  かつ  $a_3 \equiv 1$ )、 $a_1 \equiv 2$  のときは、( $a_2 \equiv 0$  かつ  $a_3 \equiv 1$ ) または ( $a_2 \equiv 2$  のときは  $a_3 \equiv 2$ ) であるので、

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{24}{125} \end{aligned}$$

(2)  $n \geq 2$  のとき、 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$  がいずれも 3 の倍数でない確率は、(1) と同様に考えると、 $\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right)^{n-2} = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$  となる。

これより、 $S_n$  が初めて 3 の倍数になる確率  $p_n$  は、

$$p_n = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$

(3)  $n \geq 4$  とき、 $S_1, S_2, S_3$  が 3 の倍数でなく  $a_3 = 5$  であるのは、 $a_1 \equiv 1$  のときは  $a_2 \equiv 1$  で  $a_3 = 5$ 、 $a_1 \equiv 2$  のときは  $a_2 \equiv 0$  で  $a_3 = 5$  の場合より、この確率  $r_3$  は、

$$r_3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$

$S_1, S_2, S_3$  が 3 の倍数でなく  $a_3 = 5$  であり、 $S_n$  が初めて 3 の倍数になる確率は、

$$r_3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{625} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}$$

これより、 $S_1, S_2, S_3$  が 3 の倍数でなく  $a_3 = 5$  であったとき、 $n$  回目に初めて  $S_n$  が 3 の倍数になる条件付き確率  $q_n$  は、

$$q_n = \frac{12}{625} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-4} \div \frac{6}{125} = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}$$

### [解説]

記述しにくいタイプの確率問題です。なお、(3)では  $r_3$  の値は不要でした。



4

問題のページへ

放物線  $y = x^2$  ……①,  $x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4}$  ……②に対して,

①上の点  $(t, t^2)$  における接線の方程式は,  $y' = 2x$  から,

$$y - t^2 = 2t(x - t), \quad y = 2tx - t^2 \dots\dots\dots③$$

ここで,  $t = 0$  のときは③は  $y = 0$  となり, 放物線②に接しないので,  $t \neq 0$  のもとで, ②③を連立して,

$$\frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4} = \frac{y}{2t} + \frac{t}{2}, \quad 2ty^2 - 2ay - 2at^2 + 3a^2t = 0 \dots\dots\dots④$$

④が重解をもつことより,  $D/4 = a^2 - 2t(-2at^2 + 3a^2t) = 0$  となり,  $a \neq 0$  から,

$$a - 2t(-2t^2 + 3at) = 0, \quad 4t^3 - 6at^2 + a = 0 \dots\dots\dots⑤$$

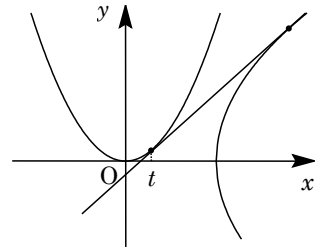
すると, ①②にともに接する接線が 3 本存在する条件は, ⑤が  $t \neq 0$  の異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので,  $f(t) = 4t^3 - 6at^2 + a$  とおくと,

$$f'(t) = 12t^2 - 12at = 12t(t - a)$$

すると,  $f(0) = a \neq 0$  より, 求める条件は,  $f(0)f(a) < 0$  であり,

$$a(4a^3 - 6a^3 + a) < 0, \quad a^2(2a^2 - 1) > 0$$

よって, 求める条件は,  $a < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} < a$  である。



### [解説]

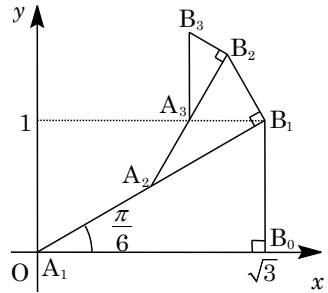
共通接線についての頻出題です。計算は穏やかです。

5

問題のページへ

- (1) 複素数平面上で  $A_1(0)$ ,  $B_0(\sqrt{3})$ ,  $B_1(\sqrt{3}+i)$  とし、  
 点  $A_2$  は線分  $A_1B_1$  の中点、点  $B_2$  は直線  $A_1B_1$  に関して点  $B_0$  の反対側で、 $\triangle A_2B_1B_2$  が  $\triangle A_1B_0B_1$  と相似になる。

$\angle B_2A_2B_1 = \frac{\pi}{6}$  で、 $A_1A_2 : A_2A_3 = 1 : \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 から、 $\overrightarrow{A_2A_3}$  は  $\overrightarrow{A_1A_2}$  を  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転し、大きさを  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  倍



したものになる。

ここで、 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$  とおくと、

$$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1), \quad z_3 = z_2 + \alpha(z_2 - z_1)$$

さらに、 $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \sqrt{3}\alpha$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt{3}\alpha + \sqrt{3}\alpha^2 = \sqrt{3}\alpha(1 + \alpha) = \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) \left( \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) \\ &= \sqrt{3} \left( \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

- (2) (1)と同様に考えると、一般的に、 $z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n)$  となり、

$$z_{n+1} - z_n = (z_2 - z_1)\alpha^{n-1} = (\sqrt{3}\alpha - 0)\alpha^{n-1} = \sqrt{3}\alpha^n$$

すると、 $n \geq 2$  において、 $\alpha \neq 1$  から、

$$z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{3}\alpha^k = 0 + \frac{\sqrt{3}\alpha(\alpha^{n-1} - 1)}{\alpha - 1} = \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha^n - \alpha}{\alpha - 1} \dots\dots(*)$$

(\*)から、 $z_6 = \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha^6 - \alpha}{\alpha - 1}$  となり、 $\alpha^6 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{27}$  なので、

$$\alpha^6 - \alpha = -\frac{1}{27} - \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) = -\frac{29}{54} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

また、 $\alpha - 1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$  から、

$$\begin{aligned} z_6 &= \sqrt{3} \cdot \frac{-\frac{29}{54} - \sqrt{3}i}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{12} (-\frac{29}{9} - \sqrt{3}i)(-3 - \sqrt{3}i) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left( \frac{29}{3} + \frac{29}{9}\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i - 3 \right) = \frac{5}{9}\sqrt{3} + \frac{14}{9}i \end{aligned}$$

- (3) 正の整数  $m$  に対して、(\*)から  $z_{6m} = \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha^{6m} - \alpha}{\alpha - 1}$  となり、 $\alpha^{6m} = \left( -\frac{1}{27} \right)^m$  より、

$$\alpha^{6m} - \alpha = \left( -\frac{1}{27} \right)^m - \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) = \left( -\frac{1}{27} \right)^m - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$z_{6m} = \sqrt{3} \cdot \frac{6 \left( -\frac{1}{27} \right)^m - 3 - \sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left\{ 6 \left( -\frac{1}{27} \right)^m - 3 - \sqrt{3}i \right\} (-3 - \sqrt{3}i)$$

そこで,  $z_{6m}$  の実部を  $\operatorname{Re}(z^{6m})$ , 虚部を  $\operatorname{Im}(z^{6m})$  とおくと,

$$\operatorname{Re}(z^{6m}) = \frac{\sqrt{3}}{12} \left\{ -18 \left( -\frac{1}{27} \right)^m + 9 - 3 \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{1}{27} \right)^m$$

$$\operatorname{Im}(z^{6m}) = \frac{\sqrt{3}}{12} \left\{ -6\sqrt{3} \left( -\frac{1}{27} \right)^m + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \right\} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{27} \right)^m$$

### [解説]

図形絡みの複素数と数列の融合問題で, 頻出タイプのもので, とりたてて工夫もせずに数値計算をしましたが, かなり難儀しました。なお, (2)では(3)の設問をみて, まず一般的に解く方法を探っています。