

1

解答解説のページへ

$m$  を正の整数とする。座標平面上の点  $(x, y)$  で、 $xn^3 + yn^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) がすべて整数であるようなものは、連立不等式  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq m$  の表す領域に何個あるか答えよ。

**2**

解答解説のページへ

袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを  $n$  回続けて行う。

袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1)  $n = 2$  の場合、総得点が 2 点となる確率を求めよ。
- (2)  $n = 4$  の場合、総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。
- (3)  $n = 10$  の場合、総得点が 8 点以上となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

- 座標平面上に曲線  $C: y = \frac{1}{x}$  および 3 点  $A(-1, -1)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $D(1, 0)$  がある。
- 曲線  $C$  上の点  $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$  に対して、直線  $AP$  と直線  $y = -2$  の交点を  $Q$  とする。ただし、 $P$  が  $A$  と等しいとき、直線  $AP$  とは  $A$  における  $C$  の接線のこととする。また、直線  $BQ$  に点  $D$  から下ろした垂線と直線  $BQ$  の交点を  $R$  とする。
- (1) 点  $P$  が曲線  $C$  上を動くとき、点  $R$  の軌跡を求めよ。
  - (2) 直線  $PR$  が原点を通るような実数  $t$  の個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1)  $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$  とする。ただし、 $i$  は虚数単位である。 $z$  を 0 でない複素数とするとき、次の等式を証明せよ。

$$\left(z - \frac{1}{z}\right) \left(wz - \frac{1}{wz}\right) \left(w^2z - \frac{1}{w^2z}\right) \left(w^3z - \frac{1}{w^3z}\right) \left(w^4z - \frac{1}{w^4z}\right) = z^5 - \frac{1}{z^5}$$

- (2) ある定数  $C$  に対して、等式

$$\sin \theta \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) \sin \left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) = C \sin 5\theta$$

がすべての実数  $\theta$  で成り立つことを示せ。また、 $C$  の値を求めよ。

- (3)  $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$  の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

2 曲線  $C_1 : y = e^{ax}$ ,  $C_2 : y = a \log x + b$  は,  $x$  座標が  $t$  ( $0 < t < 1$ ) の点で接していて,  $a \neq 0$  であるとする。ただし, 2 曲線が点  $P$  で接するとは,  $P$  を共有し,  $P$  における接線が一致することである。

- (1)  $a$  および  $b$  を  $t$  の式で表せ。
- (2) 曲線  $C_1$  と  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた部分の面積を  $S_1(t)$  とする。極限值  $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_1(t)$  を求めよ。
- (3) 曲線  $C_2$  と  $x$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた部分の面積を  $S_2(t)$  とする。極限值  $\lim_{t \rightarrow 1-0} S_2(t)$  を求めよ。

1

問題のページへ

自然数  $n$  に対して  $f(n) = xn^3 + yn^2$  とし,  $g(n) = f(n+1) - f(n)$  とおくと,

$$\begin{aligned} g(n) &= x(n+1)^3 + y(n+1)^2 - (xn^3 + yn^2) = x(3n^2 + 3n + 1) + y(2n + 1) \\ &= 3xn^2 + (3x + 2y)n + x + y \end{aligned}$$

さらに,  $h(n) = g(n+1) - g(n)$  とおくと,

$$\begin{aligned} h(n) &= 3x(n+1)^2 + (3x + 2y)(n+1) + x + y - \{3xn^2 + (3x + 2y)n + x + y\} \\ &= 3x(2n + 1) + (3x + 2y) = 6xn + 6x + 2y \end{aligned}$$

ここで, 任意の  $n$  に対し,  $f(n)$  がつねに整数である条件は,

$$f(1) = x + y \text{ が整数 かつ } g(n) \text{ がつねに整数}$$

そして, 任意の  $n$  に対し,  $g(n)$  がつねに整数である条件は,

$$g(1) = 7x + 3y \text{ が整数 かつ } h(n) \text{ がつねに整数}$$

さらに, 任意の  $n$  に対し,  $h(n)$  がつねに整数である条件は,

$$6x \text{ が整数 かつ } 6x + 2y \text{ が整数}$$

すると,  $f(n)$  がつねに整数である条件は,  $x + y$ ,  $7x + 3y$ ,  $6x$ ,  $6x + 2y$  が整数となり,  $7x + 3y = (x + y) + (6x + 2y)$ ,  $2y = (6x + 2y) - 6x$  に注意すると,  $x + y$  と  $6x$  と  $2y$  が整数, さらに  $6x = 6(x + y) - 3 \cdot 2y$  から,  $x + y$  と  $2y$  が整数となる。

これより,  $k, l$  を整数として,  $x + y = k$ ,  $2y = l$  とおくと,

$$(x, y) = \left(k - \frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$$

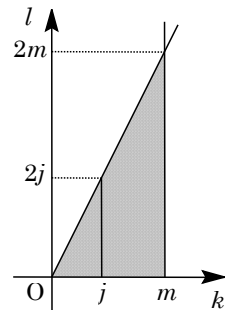
さて, 点  $(x, y)$  が, 連立不等式  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \leq m$  の表す領域にあるのは,

$$k - \frac{l}{2} \geq 0, \frac{l}{2} \geq 0, k \leq m$$

まとめると,  $0 \leq l \leq 2k$  かつ  $k \leq m$  となり,  $kl$  平面上に図示すると右図の網点部になる。ただし, 境界は領域に含む。

そして, 求める点  $(x, y)$  の個数は, この領域に含まれる格子点  $(k, l)$  の個数として数えられ, その個数を  $N$  とする。すると, 線分  $k = j$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ) 上には格子点が  $2j + 1$  個あることより,

$$N = \sum_{j=0}^m (2j + 1) = \frac{1 + (2m + 1)}{2} \cdot (m + 1) = (m + 1)^2$$



### [解説]

誘導のない整数問題です。前半は必要条件を求め十分性を確認する解法も考えられますが, 解答例では必要十分条件を求め, それをまとめる方法をとっています。

2

問題のページへ

- (1) 題意のゲームを行ったとき、白球で 1 点獲得するのを「白 1」、黒球で 1 点獲得するのを「黒 1」、黒球で点を獲得しないのを「黒 0」と表す。

さて、2 回ゲームを行い、総得点が 2 点となる確率は、

$$(i) \text{ 白 1} \rightarrow \text{白 1} \text{ のとき } \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$(ii) \text{ 白 1} \rightarrow \text{黒 1} \text{ のとき } \frac{5}{10} \times \left( \frac{5}{9} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{54}$$

$$(iii) \text{ 黒 1} \rightarrow \text{白 1} \text{ のとき } \left( \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{5}{9} = \frac{5}{54}$$

$$(iv) \text{ 黒 1} \rightarrow \text{黒 1} \text{ のとき } \left( \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} \right) \times \left( \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{81}$$

$$(i) \sim (iv) \text{ より、求める確率は、} \frac{2}{9} + \frac{5}{54} \times 2 + \frac{2}{81} = \frac{35}{81} \text{ となる。}$$

- (2) (i) 4 回ゲームを行い、総得点が 0 点となるとき

黒 0 → 黒 0 → 黒 0 → 黒 0 の場合より、その確率は、

$$\left( \frac{5}{10} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{7 \times 3^5}$$

- (ii) 4 回ゲームを行い、総得点が 1 点となるとき

- (ii-i) 白 1 が 1 回、黒 0 が 3 回のとき

白 1 → 黒 0 → 黒 0 → 黒 0, 黒 0 → 白 1 → 黒 0 → 黒 0, 黒 0 → 黒 0 → 白 1 → 黒 0, 黒 0 → 黒 0 → 黒 0 → 白 1 の場合より、その確率は、

$$\frac{5}{10} \times \left( \frac{5}{9} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{4}{8} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \right) \times 4 = \frac{40}{7 \times 3^4}$$

- (ii-ii) 黒 1 が 1 回、黒 0 が 3 回のとき

黒 1 → 黒 0 → 黒 0 → 黒 0, 黒 0 → 黒 1 → 黒 0 → 黒 0, 黒 0 → 黒 0 → 黒 1 → 黒 0, 黒 0 → 黒 0 → 黒 0 → 黒 1 の場合より、その確率は、

$$\left( \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} \right) \times \left( \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \right) \times 4 = \frac{16}{7 \times 3^5}$$

$$(i)(ii) \text{ より、総得点が 1 点以下の確率は、} \frac{8}{7 \times 3^5} + \frac{40}{7 \times 3^4} + \frac{16}{7 \times 3^5} = \frac{144}{7 \times 3^5} = \frac{16}{189}$$

以上より、4 回ゲームを行い、総得点が 2 点以上となる確率は、

$$1 - \frac{16}{189} = \frac{173}{189}$$

- (3) (i) 10 回ゲームを行い、総得点が 8 点となるとき

白 1 が 5 回、黒 1 が 3 回、黒 0 が 2 回より、その確率は、

$$\frac{5!}{10P_5} \cdot \frac{5!}{5P_3} \left( \frac{1}{3} \right)^3 \left( \frac{2}{3} \right)^2 \times \frac{10!}{5!3!2!} = \frac{40}{3^5}$$

- (ii) 10 回ゲームを行い、総得点が 9 点となるとき

白 1 が 5 回、黒 1 が 4 回、黒 0 が 1 回より、その確率は、

$$\frac{5!}{10P_5} \cdot \frac{5!}{5P_5} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{10!}{5!4!1!} = \frac{10}{3^5}$$

(iii) 10回ゲームを行い、総得点が10点となる時

白1が5回、黒1が5回より、その確率は、

$$\frac{5!}{10P_5} \cdot \frac{5!}{5P_5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \frac{10!}{5!5!} = \frac{1}{3^5}$$

(i)～(iii)より、10回ゲームを行い、総得点が8点以上となる確率は、

$$\frac{40}{3^5} + \frac{10}{3^5} + \frac{1}{3^5} = \frac{17}{81}$$

### [解説]

基本的な確率の問題で、最も要求されるのは注意力です。なお、(2)(3)の解答例については、場合分けをまとめて記しています。



3

問題のページへ

(1) 3 点  $A(-1, -1)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $D(1, 0)$ , および曲線

$C: y = \frac{1}{x}$  ……①上の点  $P(t, \frac{1}{t})$  に対して,

$t \neq -1$  のとき, 直線  $AP$  は, 傾きが  $\frac{\frac{1}{t} + 1}{t + 1} = \frac{1}{t}$  より,

$$y + 1 = \frac{1}{t}(x + 1) \dots\dots\dots ②$$

また,  $t = -1$  のとき, 点  $A$  における接線の傾きは, ①より  $y' = -\frac{1}{x^2}$  なので  $-\frac{1}{(-1)^2} = -1$  となる。これより,

接線の方程式は,  $y + 1 = -(x + 1)$  となり, ②に  $t = -1$  をあてはめた式と一致する。

よって, 直線  $AP$  の方程式は  $t$  の値にかかわらず②で表せ, 直線  $y = -2$  との交点  $Q$  は,  $-2 + 1 = \frac{1}{t}(x + 1)$  から  $x = -t - 1$  となり,  $Q(-t - 1, -2)$  である。

次に, 直線  $BQ$  の方程式は,  $y = \frac{-2}{-t - 1 + 1}(x + 1)$  より,  $y = \frac{2}{t}(x + 1) \dots\dots\dots ③$

点  $D$  から直線  $BQ$  に下ろした垂線の方程式は,  $y = -\frac{t}{2}(x - 1) \dots\dots\dots ④$

直線③と④の交点  $R$  の軌跡の方程式は, ③④から  $t$  を消去すると,

$$y^2 = -(x + 1)(x - 1), \quad x^2 + y^2 = 1$$

なお, 直線③は, 点  $B$  を通る直線のうち  $x = -1$  と  $y = 0$  は表さない。直線④は, 点  $D$  を通る直線のうち  $x = 1$  と  $t \neq 0$  から  $y = 0$  は表さない。これより, 直線③と④の交点  $R$  が点  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  である  $t \neq 0$  は存在しないことより, 点  $R$  の軌跡は,

$$\text{円: } x^2 + y^2 = 1 \quad (2 \text{ 点 } (-1, 0), (1, 0) \text{ は除く})$$

(2) ③④を連立すると,  $\frac{2}{t}(x + 1) = -\frac{t}{2}(x - 1)$  となり,  $4(x + 1) + t^2(x - 1) = 0$  から,

$$(t^2 + 4)x = t^2 - 4, \quad x = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}$$

$$\text{④から, } y = -\frac{t}{2} \left( \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4} - 1 \right) = -\frac{t}{2} \cdot \frac{-8}{t^2 + 4} = \frac{4t}{t^2 + 4}$$

これより  $R\left(\frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}, \frac{4t}{t^2 + 4}\right)$  となり, 直線  $PR$  が原点を通る条件は  $\overline{OP} \parallel \overline{OR}$  から,

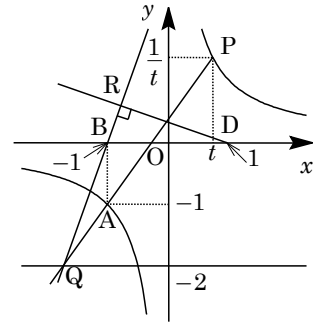
$$t \cdot \frac{4t}{t^2 + 4} - \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4} = 0, \quad 4t^3 - t^2 + 4 = 0 \dots\dots\dots ⑤$$

ここで,  $f(t) = 4t^3 - t^2 + 4$  とおくと,

$$f'(t) = 12t^2 - 2t = 2t(6t - 1)$$

これより,  $f(t)$  の増減は右表のようになり,

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{54} - \frac{1}{36} + 4 > 0$$



$t$	...	0	...	$\frac{1}{6}$	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	4	↘		↗

よって、 $f(t)=0$ すなわち⑤の $t \neq 0$ の実数解は1つとなり、直線 PR が原点を通るような実数  $t$  の個数は1である。

### [解 説]

軌跡に微分の応用を融合した問題です。(1)については、軌跡が線分 BD を直径とする円というのは、 $BR \perp DR$  から明らかです。ただ、(2)の設問を考え合わせて、数式を用いた処理をしています。

4

問題のページへ

(1)  $w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$  に対して,  $w^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$  となり,

$$w^5 - 1 = 0, (w-1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) = 0$$

$w \neq 1$  から,  $w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて,  $P = \left(wz - \frac{1}{wz}\right) \left(w^2z - \frac{1}{w^2z}\right) \left(w^3z - \frac{1}{w^3z}\right) \left(w^4z - \frac{1}{w^4z}\right)$  とおくと,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から,

$$\begin{aligned} P &= \left(wz - \frac{w^4}{z}\right) \left(w^2z - \frac{w^3}{z}\right) \left(w^3z - \frac{w^2}{z}\right) \left(w^4z - \frac{w}{z}\right) \\ &= \left(w^5z^2 - w^2 - w^8 + \frac{w^5}{z^2}\right) \left(w^5z^2 - w^4 - w^6 + \frac{w^5}{z^2}\right) \end{aligned}$$

$$= \left(z^2 + \frac{1}{z^2} - w^2 - w^3\right) \left(z^2 + \frac{1}{z^2} - w^4 - w\right)$$

$$= \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - (w^2 + w^3 + w^4 + w) \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + (w^2 + w^3)(w^4 + w)$$

$$= z^4 + 2 + \frac{1}{z^4} - (w + w^2 + w^3 + w^4) \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + (w^6 + w^3 + w^7 + w^4)$$

$$= z^4 + 2 + \frac{1}{z^4} + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + (w + w^3 + w^2 + w^4) = z^4 + z^2 + 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}$$

すると,  $\left(z - \frac{1}{z}\right)P = \left(z - \frac{1}{z}\right) \left(z^4 + z^2 + 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}\right) = z^5 - \frac{1}{z^5}$  となり,

$$\left(z - \frac{1}{z}\right) \left(wz - \frac{1}{wz}\right) \left(w^2z - \frac{1}{w^2z}\right) \left(w^3z - \frac{1}{w^3z}\right) \left(w^4z - \frac{1}{w^4z}\right) = z^5 - \frac{1}{z^5} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2)  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  とおくと,  $\frac{1}{z} = \cos \theta - i \sin \theta$  から  $z - \frac{1}{z} = 2i \sin \theta$

$$z^5 - \frac{1}{z^5} = \cos 5\theta + i \sin 5\theta - (\cos 5\theta - i \sin 5\theta) = 2i \sin 5\theta$$

同様に,  $w^k z = \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{5}\right)$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) から,

$$w^k z - \frac{1}{w^k z} = 2i \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{5}\right)$$

これらの式を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$(2i)^5 \sin \theta \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) = 2i \sin 5\theta$$

$$\sin \theta \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right) \sin\left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right) = \frac{1}{16} \sin 5\theta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

よって,  $C = \frac{1}{16}$  となる。

(3)  $\theta = \frac{\pi}{10}$  とすると,  $\theta + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$ ,  $\theta + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$ ,  $\theta + \frac{8\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}$

$\textcircled{2}$ より,  $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{10} \sin \frac{13\pi}{10} \sin \frac{17\pi}{10} = \frac{1}{16} \sin \frac{\pi}{2}$  となり,

$$\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{9\pi}{10} \sin \frac{13\pi}{10} \sin \frac{17\pi}{10} = \frac{1}{16} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで,  $\sin \frac{9\pi}{10} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) = \sin \frac{\pi}{10}$ ,  $\sin \frac{13\pi}{10} = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10}$ ,  
 $\sin \frac{17\pi}{10} = \sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = -\sin \frac{3\pi}{10}$  なので, ③から,

$$\sin^2 \frac{\pi}{10} \sin^2 \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{16}$$

すると,  $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10} > 0$  なので,  $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}$  となる。

### [解説]

極形式の複素数の計算と三角関数を融合した問題です。誘導が細かいので方針に迷いはないでしょうが、ただ記述量にはかなりのものです。

5

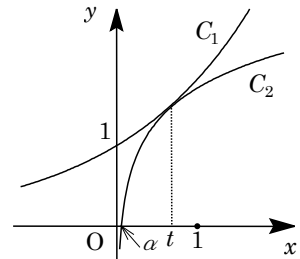
問題のページへ

- (1) 2 曲線  $C_1 : y = e^{ax} \cdots \cdots \textcircled{1}$  と  $C_2 : y = a \log x + b \cdots \cdots \textcircled{2}$  は、  
 $x$  座標が  $t$  ( $0 < t < 1$ ) の点で接している。①から  $y' = ae^{ax}$ 、  
 ②から  $y' = \frac{a}{x}$  なので、

$$e^{at} = a \log t + b \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad ae^{at} = \frac{a}{t} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{より, } a \neq 0 \text{ なので } e^{at} = \frac{1}{t} \text{ から, } a = -\frac{\log t}{t} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \text{に代入すると, } \frac{1}{t} = -\frac{(\log t)^2}{t} + b \text{ となり, } b = \frac{(\log t)^2 + 1}{t} \cdots \cdots \textcircled{6}$$



- (2)  $C_1$  と  $x$  軸,  $y$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた部分の面積  $S_1(t)$  は、

$$S_1(t) = \int_0^t e^{ax} dx = \left[ \frac{1}{a} e^{ax} \right]_0^t = \frac{1}{a} (e^{at} - 1) = -\frac{t}{\log t} \left( \frac{1}{t} - 1 \right) = \frac{t-1}{\log t}$$

ここで、 $f(t) = \log t$  とおくと、 $\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{\log t}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = f'(1)$  から、

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} S_1(t) = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

- (3) まず、 $C_2$  と  $x$  軸が  $x = \alpha$  で交わるとすると、 $a \log \alpha + b = 0$  となり、⑤⑥から、

$$\log \alpha = -\frac{b}{a} = \frac{(\log t)^2 + 1}{\log t}, \quad \alpha = e^{\frac{(\log t)^2 + 1}{\log t}}$$

すると、 $C_2$  と  $x$  軸および直線  $x = t$  で囲まれた部分の面積  $S_2(t)$  は、

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_{\alpha}^t (a \log x + b) dx = [a(x \log x - x) + bx]_{\alpha}^t \\ &= at \log t - a \log \alpha + (b-a)(t-\alpha) \\ &= -\frac{\log t}{t} \cdot t \log t + \frac{\log t}{t} \cdot \frac{(\log t)^2 + 1}{\log t} \alpha + \left\{ \frac{(\log t)^2 + 1}{t} + \frac{\log t}{t} \right\} (t-\alpha) \\ &= -(\log t)^2 + \frac{(\log t)^2 + 1}{t} \alpha + (\log t)^2 + \log t + 1 - \frac{(\log t)^2 + \log t + 1}{t} \alpha \\ &= -\frac{\log t}{t} \alpha + \log t + 1 \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{\log t}{t} = 0$ 、 $\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{(\log t)^2 + 1}{\log t} = -\infty$  より  $\lim_{t \rightarrow 1-0} \alpha = 0$  となるので、

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} S_2(t) = 0 + 0 + 1 = 1$$

### [解説]

面積計算と極限の融合問題です。(3)では、計算力が問われています。