

1

解答解説のページへ

円周を 12 等分するように点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ が時計回りに並んでいる。また、白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を、次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに、黒球ならば反時計回りに、サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い、 P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い、 P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い、 P が R から移動した点を S とおく。

(1) $R = A_1$ となる確率を求めよ。

(2) 3 点 Q, R, S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面において、原点 O と点 $A(1, 0)$ と点 $B(0, 1)$ がある。 $0 < t < 1$ に対し、線分 BO, OA, AB のそれぞれを $t : (1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする。

- (1) $\triangle PQR$ の面積を t の式で表せ。
- (2) $\triangle PQR$ が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。
- (3) $\theta = \angle RPQ$ とする。(2)のそれぞれの場合に $\cos \theta$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。
- (2) $0 \leq a \leq 2$ とする。 $S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2)で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) まず、点 P を A_1 に置き、与えられた操作を行い、 $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$ と移動して、R が A_1 に一致するのは、

(i) $P \rightarrow Q$ と $Q \rightarrow R$ が同じ向きするとき

白 6・白 6 または黒 6・黒 6 の場合より、その確率は、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{2}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{12}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{14}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

(ii) $P \rightarrow Q$ と $Q \rightarrow R$ が逆向きするとき

整数 $k (1 \leq k \leq 6)$ に対し、白 k ・黒 k または黒 k ・白 k の場合より、その確率は、

$$\left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) \times 6 + \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) \times 6 = \frac{48}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{48}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{96}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

(i)(ii)より、 $R = A_1$ となる確率は、 $\frac{14}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{96}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{110}{30} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{108}$

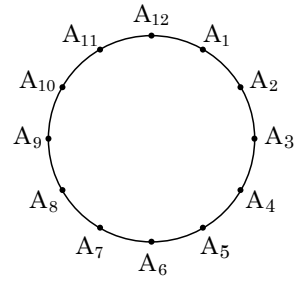
(2) $P = A_1 \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$, $R \rightarrow S$ と移動するとき、 $\triangle QRS$ が正三角形となる確率は、整数 $k (1 \leq k \leq 6)$ に対して、

(i) 白 k ・黒 4・黒 4 の場合 $\left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) \times 6 = \frac{24}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2$

(ii) 黒 k ・白 4・白 4 の場合 $\left(\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) \times 6 = \frac{8}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2$

(iii) 黒 k ・黒 4・黒 4 の場合 $\left(\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6}\right) \times 6 = \frac{24}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2$

(i)~(iii)より、求める確率は、 $\frac{24}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{24}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{56}{120} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{540}$



[解説]

丁寧に数えるタイプの確率問題です。(2)では、白球が 2 個より、白 k ・白 4・白 4 という場合のないことに要注意です。

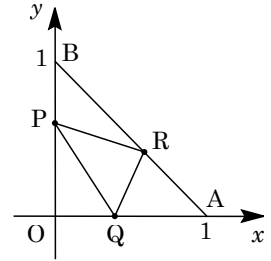
2

問題のページへ

- (1) 原点 O , $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ に対し, 線分 BO , OA , AB のそれぞれを $t:(1-t)$ に内分する点を P , Q , R とする。

すると, $\triangle OPQ = \triangle AQR = \triangle BPR = t(1-t)\triangle OAB$ より,

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \{1-3t(1-t)\}\triangle OAB = (1-3t+3t^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\end{aligned}$$



- (2) 三平方の定理と余弦定理より, $PQ^2 = t^2 + (1-t)^2 = 2t^2 - 2t + 1$

$$QR^2 = (1-t)^2 + (\sqrt{2}t)^2 - 2(1-t) \cdot \sqrt{2}t \cos 45^\circ = 5t^2 - 4t + 1$$

$$PR^2 = t^2 + \{\sqrt{2}(1-t)\}^2 - 2t \cdot \sqrt{2}(1-t) \cos 45^\circ = 5t^2 - 6t + 2$$

- (i) $PQ = QR$ のとき $2t^2 - 2t + 1 = 5t^2 - 4t + 1$ より, $3t^2 - 2t = 0$

$$t(3t-2) = 0 \text{ で } 0 < t < 1 \text{ から, } t = \frac{2}{3}$$

- (ii) $QR = PR$ のとき $5t^2 - 4t + 1 = 5t^2 - 6t + 2$ より, $2t - 1 = 0$

$$0 < t < 1 \text{ から, } t = \frac{1}{2}$$

- (iii) $PR = PQ$ のとき $5t^2 - 6t + 2 = 2t^2 - 2t + 1$ より, $3t^2 - 4t + 1 = 0$

$$(3t-1)(t-1) = 0 \text{ で } 0 < t < 1 \text{ から, } t = \frac{1}{3}$$

- (i)~(iii)より, $\triangle PQR$ が二等辺三角形になるのは, $t = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ のときである。

- (3) $\theta = \angle RPQ$ とすると, 余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2PQ \cdot PR} = \frac{(2t^2 - 2t + 1) + (5t^2 - 6t + 2) - (5t^2 - 4t + 1)}{2\sqrt{2t^2 - 2t + 1}\sqrt{5t^2 - 6t + 2}} \\ &= \frac{2t^2 - 4t + 2}{2\sqrt{2t^2 - 2t + 1}\sqrt{5t^2 - 6t + 2}} = \frac{(1-t)^2}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}\sqrt{5t^2 - 6t + 2}}\end{aligned}$$

- (i) $t = \frac{2}{3}$ のとき $\cos \theta = \frac{1}{9} \div \left(\sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{\frac{2}{9}} \right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

- (ii) $t = \frac{1}{2}$ のとき $\cos \theta = \frac{1}{4} \div \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- (iii) $t = \frac{1}{3}$ のとき $\cos \theta = \frac{4}{9} \div \left(\sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} \right) = \frac{4}{5}$

[解説]

三角比の応用問題です。基本的な内容ですが, 計算量は多めです。

3

問題のページへ

(1) $y = ax \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = x|x-2| \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対し, ②から,

$$y = -x(x-2) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \quad (x < 2) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$y = x(x-2) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③より, $y' = -2x + 2$ なので, $x = 0$ における微分係数は $y' = 2$, すなわち原点における接線の傾きは 2 となる。

すると, 右図から, ①と②の共有点の個数は, $a < 0$ のとき 1 個, $a = 0$ のとき 2 個, $0 < a < 2$ のとき 3 個, $a = 2$ のとき 2 個, $a > 2$ のとき 3 個となる。

よって, 共有点の個数が最大なのは 3 個で, このとき,

$$0 < a < 2, \quad a > 2$$

(2) $0 \leq a \leq 2$ のとき, ①と③の $x \neq 0$ の交点は,

$$-x^2 + 2x = ax, \quad x = 2 - a$$

また, ①と④の $x \neq 0$ の交点は,

$$x^2 - 2x = ax, \quad x = 2 + a$$

ここで, $\alpha = 2 - a$, $\beta = 2 + a$ とおき, 右図の各領域の面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とすると, ①と②で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は,

$$\begin{aligned} S(a) &= S_1 + S_3 = S_1 + \{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4\} \\ &= 2S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4 \\ &= 2 \int_0^\alpha -x(x-\alpha) dx + \int_0^\beta -x(x-\beta) dx - 2 \int_0^2 -x(x-2) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{6} \beta^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{1}{3} (2-a)^3 + \frac{1}{6} (2+a)^3 - \frac{8}{3} \\ &= -\frac{1}{6} a^3 + 3a^2 - 2a + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(3) $S'(a) = -\frac{1}{2} a^2 + 6a - 2 = -\frac{1}{2} (a^2 - 12a + 4)$

すると, $S'(a) = 0$ の解が $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$ より, $0 \leq a \leq 2$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

したがって, $a = 6 - 4\sqrt{2}$ のとき $S(a)$ は最小値をとる。

| | | | | | |
|---------|---|-----|-----------------|-----|---|
| a | 0 | ... | $6 - 4\sqrt{2}$ | ... | 2 |
| $S'(a)$ | | - | 0 | + | |
| $S(a)$ | | ↘ | | ↗ | |

[解説]

定積分と面積についての超頻出問題です。(2)の積分は普通に計算してもよいのですが, 解答例では公式処理をしました。パズルのようなのですが。