1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　3 辺の長さが $2, 5, a$ である三角形が存在するような, a の値の範囲を求めよ。

(2)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である三角形が存在するような, x の値の範囲を求めよ。

(3)　ある二等辺三角形の 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ であるとき, x の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

白球が 3 個，黒球が 5 個，赤球が 2 個入った袋がある。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から球を 1 個取り出す。白球だった場合は 1 点を獲得する。黒球だった場合はさいころを投げて，出た目が 3 の倍数だった場合には 1 点，そうでない場合には 0 点を獲得する。赤球だった場合はコインを投げて，表が出た場合は 2 点，裏が出た場合は 0 点を獲得する。取り出した球は袋に戻さない。

(1)　$n=2$ のとき，総得点がちょうど 3 点となる確率を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，総得点がちょうど 5 点となる確率を求めよ。

(3)　$n=3$ のとき，総得点が 4 点以上となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を実数とする。$f(x)=x^2-ax+a^2-2$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつような，a の値の範囲を求めよ。

(2)　k を正の実数とし，$g(x)=kx$ とする。a が(1)の範囲にあるとき，$y=|f(x)|$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　3 辺の長さが $2, 5, a$ である三角形が存在する条件は，$a>0$ のもとで，

$$5-2<a<5+2,\ 3<a<7$$

(2)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である三角形が存在する条件は，$\log_{10}(5x)>0$ かつ $\log_{10}(x+10)>0$，すなわち $5x>1$ かつ $x+10>1$ から，$x>\dfrac{1}{5}$ のもとで，$\log_{10}(x+10)>\log_{10}3$ に注意すると，

$$\log_{10}(x+10)-\log_{10}3<\log_{10}(5x)<\log_{10}(x+10)+\log_{10}3$$

これより，$\log_{10}\dfrac{x+10}{3}<\log_{10}(5x)<\log_{10}3(x+10)$ となり，

$$\frac{x+10}{3}<5x<3(x+10)\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$\dfrac{x+10}{3}<5x$ に対して，$x+10<15x$ から $x>\dfrac{5}{7}$，また $5x<3(x+10)$ に対して，$5x<3x+30$ から $x<15$ であるので，求める(*)の解は，

$$\frac{5}{7}<x<15\ \left(\text{この式は } x>\frac{1}{5} \text{ を満たしている}\right)$$

(3)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である二等辺三角形について，(2) より $\dfrac{25}{7}<5x<75$，$\dfrac{75}{7}<x+10<25$ となり，

$$\log_{10}(5x)>\log_{10}3,\ \log_{10}(x+10)>\log_{10}3$$

これより，二等辺三角形の等辺の長さは，$\log_{10}(5x)$ と $\log_{10}(x+10)$ になり，

$$\log_{10}(5x)=\log_{10}(x+10),\ 5x=x+10$$

よって，$x=\dfrac{5}{2}$ であり，この値は $\dfrac{5}{7}<x<15$ を満たしている。

［解　説］

三角形の形成条件を題材にした対数不等式の問題です。

2　　問題のページへ

白球が 3 個, 黒球が 5 個, 赤球が 2 個入った袋を用いて, 与えられたゲームを行うとき, 白球で 1 点を獲得する事象をW_1, 黒球で 1 点, 0 点を獲得する事象をそれぞれB_1, B_0, 赤球で 2 点, 0 点を獲得する事象をそれぞれR_2, R_0とおく。

(1)　ゲームを 2 回続けて行うとき, 総得点が 3 点となるのは,

(i)　$W_1 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{3\cdot 2}{10\cdot 9}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{30}$で, $R_2 \to W_1$のときも同じ確率。

(ii) $B_1 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{5\cdot 2}{10\cdot 9}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{54}$で, $R_2 \to B_1$のときも同じ確率。

(i)(ii)より, 総得点が 3 点となる確率は, $\dfrac{1}{30}\times 2+\dfrac{1}{54}\times 2=\dfrac{14}{135}$である。

(2)　ゲームを 3 回続けて行うとき, 総得点が 5 点となるのは,

(i)　$W_1 \to R_2 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2^5\cdot 3\cdot 5}$

なお, $R_2 \to W_1 \to R_2$, $R_2 \to R_2 \to W_1$のときも同確率である。

(ii)　$B_1 \to R_2 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{5\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2^5\cdot 3^3}$

なお, $R_2 \to B_1 \to R_2$, $R_2 \to R_2 \to B_1$のときも同確率である。

(i)(ii)より, 総得点が 5 点となる確率は,

$$\frac{1}{2^5\cdot 3\cdot 5}\times 3+\frac{1}{2^5\cdot 3^3}\times 3=\frac{1}{2^5\cdot 5}+\frac{1}{2^5\cdot 3^2}=\frac{14}{2^5\cdot 3^2\cdot 5}=\frac{7}{720}$$

(3)　ゲームを 3 回続けて行うとき, 総得点が 4 点となるのは,

(i)　$B_0 \to R_2 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{5\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\times\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2^4\cdot 3^3}$

なお, $R_2 \to B_0 \to R_2$, $R_2 \to R_2 \to B_0$のときも同確率である。

(ii)　$W_1 \to W_1 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{3\cdot 2\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^3\cdot 3\cdot 5}$

なお, $W_1 \to R_2 \to W_1$, $R_2 \to W_1 \to W_1$のときも同確率である。

(iii)　$B_1 \to B_1 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{5\cdot 4\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^2\cdot 3^4}$

なお, $B_1 \to R_2 \to B_1$, $R_2 \to B_1 \to B_1$のときも同確率である。

(iv)　$W_1 \to B_1 \to R_2$のとき　その確率は$\dfrac{3\cdot 5\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^4\cdot 3^2}$

なお, $B_1 \to W_1 \to R_2$, $W_1 \to R_2 \to B_1$, $B_1 \to R_2 \to W_1$, $R_2 \to W_1 \to B_1$, $R_2 \to B_1 \to W_1$のときも同確率である。

(i)～(iv)より, 総得点が 4 点となる確率は,

$$\frac{1}{2^4\cdot 3^3}\times 3+\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 5}\times 3+\frac{1}{2^2\cdot 3^4}\times 3+\frac{1}{2^4\cdot 3^2}\times 3!$$
$$=\frac{1}{2^4\cdot 3^2}+\frac{1}{2^3\cdot 5}+\frac{1}{2^2\cdot 3^3}+\frac{1}{2^3\cdot 3}=\frac{179}{2^4\cdot 3^3\cdot 5}=\frac{179}{2160}$$

そして，ゲームを 3 回続けて行うとき，総得点は 5 点以下であるので，総得点が 4 点以上となる確率は，(2)の結果を合わせて，

$$\frac{179}{2160}+\frac{7}{720}=\frac{200}{2160}=\frac{5}{54}$$

［解　説］

注意深さと忍耐力の要求される確率問題です。「取り出した球は袋に戻さない」という点が，数え上げのポイントです。

3

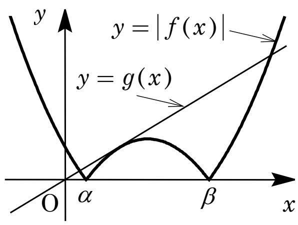
問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2-ax+a^2-2=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2-2$ に対し，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつ条件は，$y=f(x)$ の頂点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{4}a^2-2\right)$ から，

$$\frac{a}{2}>0\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ \frac{3}{4}a^2-2<0\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ f(0)=a^2-2>0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①より $a>0$ なので，②は $a^2-\dfrac{8}{3}<0$ から $0<a<\sqrt{\dfrac{8}{3}}$，③は $a>\sqrt{2}$ となり，まとめると $\sqrt{2}<a<\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ から，$\sqrt{2}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ である。

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$ とする。



さて，$g(x)=kx\ (k>0)$ に対し，$k=k_0$ で $y=|f(x)|$ と $y=g(x)$ のグラフが $\alpha<x<\beta$ において接するとする。このとき, 2 つのグラフの共有点の個数は，$0<k<k_0$ で 4 個，$k=k_0$ で 3 個，$k>k_0$ で 2 個となる。

そこで，$\alpha<x<\beta$ において，$y=|f(x)|=-f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると，

$$-(x^2-ax+a^2-2)=kx\,,\ \ x^2+(k-a)x+a^2-2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

④が正の重解をもつ条件は，$k=k_0$ として，

$$-\frac{k_0-a}{2}>0\ \cdots\cdots\cdots⑤,\ \ D=(k_0-a)^2-4(a^2-2)=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥より $k_0-a=\pm2\sqrt{a^2-2}$ となり，⑤を合わせると $k_0-a=-2\sqrt{a^2-2}$ から，

$$k_0=a-2\sqrt{a^2-2}$$

したがって，$y=|f(x)|$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるのは，

$$k=a-2\sqrt{a^2-2}$$

［解 説］

絶対値付きの 2 次関数のグラフに関する基本題です。