1

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の $2n$ 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y)\,|\,x=1, 2, 3, \cdots, n,\ \ y=1, 2\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選び，その 3 点を線分で結んで得られる図形の面積を X とする。ただし，3 点が同一直線上にあるときは $X=0$ とする。

(1)　k が 0 以上の整数のとき，X が $\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k を n と k の式で表せ。

(2)　X が $\dfrac{n}{4}$ 以下となる確率を q_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)=e^{x}+e^{-2x}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)　$f(x)=2$ となる x の値をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた x の値のうち最小のものを a_1，最大のものを a_2 とする。$y=f(x)$ のグラフ，x 軸，直線 $x=a_1$，直線 $x=a_2$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

n を正の整数とする。x の関数 $f(x)=x^3-2nx^2+(2n-3)x+1$ について以下の問いに答えよ。

(1)　α を $f(x)=0$ の 1 つの解とする。$f\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする。極限 $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 1，中心 O の円 C がある。2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする。

・C_1 と C_2 はどちらも C に内接する。

・C_1 と C_2 は互いに外接する。

円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ D, E とし，半径をそれぞれ p, q とする。$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　q を p と θ を用いて表せ。

(2)　p を固定する。θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ。

さらに，円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする。

・C_3 と C_1 は半径が等しい。

・C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する。

このとき以下の問いに答えよ。

(3)　$p = \sqrt{2} - 1$ のとき，q の値を求めよ。

(4)　θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{p}$ の極限値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

m を 0 以上の整数, n を 1 以上の整数, t を $0<t<1$ を満たす実数とし, $F(m,\ n)$ を $F(m,\ n)=\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1} {}_k\mathrm{C}_m t^k$ で定める。

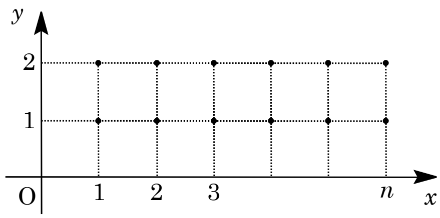
(1) p を整数とする。$A=\dfrac{(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)}{t^p}$ が t によらない値となるような p と, そのときの A を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)$ が収束することを示し, その極限値を求めよ。ただし, $0<s<1$ のとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty}k^m s^k=0$ であることは用いてよい。

1

問題のページへ

(1)　$n \geqq 3$ のとき，右図の $2n$ 個の点から異なる 3 点を選び，それを線分で結んで得られる図形の面積 X について，k を 0 以上の整数とするとき，$X=\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k は，



(i)　$k=0$ のとき

3 点が $y=1$ 上のある場合，または 3 点が $y=2$ 上にある場合より，

$$p_0=\frac{{}_n\mathrm{C}_3\times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{2n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{n-2}{2(2n-1)}$$

(ii)　$k \geqq 1$ のとき

2 点が $y=1$ 上で 1 点が $y=2$ 上にある場合について，3 点の座標を $(a,\ 1)$，$(b,\ 1)$，$(c,\ 2)$ とおく。ただし，$1 \leqq a < b \leqq n$，$1 \leqq c \leqq n$ である。

このとき，$X=\dfrac{1}{2}(b-a)\cdot 1=\dfrac{b-a}{2}$ となり，$X=\dfrac{k}{2}$ であるのは $b-a=k$ から，

$$(a,\ b)=(1,\ k+1),\ (2,\ k+2),\ \cdots\cdots,\ (n-k,\ n)$$

すると，$(a,\ b)$ の選び方は $n-k$ 通り，また c の選び方は n 通りである。

また，2 点が $y=2$ 上で 1 点が $y=1$ 上にある場合についても同様なので，

$$p_k=\frac{(n-k)n\times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{6\cdot 2n(n-k)}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}$$

なお，$\dfrac{k}{2} \geqq \dfrac{1}{2}n$ すなわち $k \geqq n$ のときは，$p_k=0$ である。

(i)(ii)より，$p_0=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$，$p_k=\dfrac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}\ (1 \leqq k \leqq n-1)$，$p_k=0\ (k \geqq n)$

(2)　$X \leqq \dfrac{n}{4}$ となるのは，(1)から $\dfrac{k}{2} \leqq \dfrac{n}{4}\left(k \leqq \dfrac{n}{2}\right)$ が対応するので，その確率 q_n は，

(a)　n が偶数のとき

$$\begin{aligned}q_n&=p_0+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}p_k=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-k)\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\left\{n\cdot\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\}\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\cdot\frac{n}{8}\{4n-(n+2)\}\\&=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3n(3n-2)}{8(n-1)(2n-1)}=\frac{1-\frac{2}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\frac{3\left(3-\frac{2}{n}\right)}{8\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}\end{aligned}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{13}{16}$ となる。

(b)　n が奇数のとき

$$q_n=p_0+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}p_k=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-k)$$
$$=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\left\{n\cdot\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right\}$$
$$=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\cdot\frac{n-1}{8}\{4n-(n+1)\}$$
$$=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3(3n-1)}{8(2n-1)}=\frac{1-\frac{2}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\frac{3\left(3-\frac{1}{n}\right)}{8\left(2-\frac{1}{n}\right)}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{13}{16}$ となる。

(a)(b)より，n の偶奇にかかわらず，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{13}{16}$ である。

［解　説］

確率と数列の融合問題です。基本的な内容ですが，計算量は多めです。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x+e^{-2x}$ に対して，$f'(x)=e^x-2e^{-2x}=e^{-2x}(e^{3x}-2)$

ここで，$f'(x)=0$ となるのは $e^{3x}=2$，すなわち $e^x=\sqrt[3]{2}$ から $x=\dfrac{1}{3}\log 2$ のときであり，これをもとに $f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)$ の最小値は,

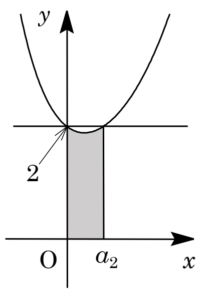
$$f\Big(\frac{1}{3}\log 2\Big)=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

(2)　$f(x)=2$ から $e^x+e^{-2x}=2$ となり，$e^{3x}+1=2e^{2x}$ より，

$$e^{3x}-2e^{2x}+1=0,\ (e^x-1)(e^{2x}-e^x-1)=0$$

$e^x>0$ なので，$e^x=1,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となり，$x=0,\ \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)　$a_1=0$，$a_2=\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$y=f(x)$ のグラフ, x 軸, 直線 $x=a_1$, 直線 $x=a_2$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は,



$$V=\pi\int_0^{a_2}(e^x+e^{-2x})^2dx=\pi\int_0^{a_2}(e^{2x}+2e^{-x}+e^{-4x})dx$$

$$=\pi\Big[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\Big]_0^{a_2}$$

$$=\pi\Big\{\frac{1}{2}(e^{2a_2}-1)-2(e^{-a_2}-1)-\frac{1}{4}(e^{-4a_2}-1)\Big\}$$

$$=\pi\Big(\frac{1}{2}e^{2a_2}-2e^{-a_2}-\frac{1}{4}e^{-4a_2}+\frac{7}{4}\Big)$$

$e^{a_2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$e^{2a_2}=\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$e^{4a_2}=\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

$$e^{-a_2}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ e^{-4a_2}=\frac{2}{7+3\sqrt{5}}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

よって，$V=\pi\Big(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{7}{4}\Big)=\dfrac{21-3\sqrt{5}}{8}\pi$ となる。

［解 説］

回転体の体積を求める基本題です。ただ，数値計算はかなり面倒ですが。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-2nx^2+(2n-3)x+1$ に対し，$f(x)=0$ の 1 つの解を α とするとき，

$$f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3-2n\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2+(2n-3)\cdot\frac{1}{1-\alpha}+1$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)^3}\{1-2n(1-\alpha)+(2n-3)(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3\}$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)^3}\{-1-(2n-3)\alpha+2n\alpha^2-\alpha^3\}=-\frac{f(\alpha)}{(1-\alpha)^3}=0$$

(2)　$f'(x)=3x^2-4nx+2n-3$ となり，$f'(x)=0$ の判別式 D は，$n\geqq 1$ から，

$$D/4=4n^2-3(2n-3)=4n^2-6n+9=(2n-3)^2+6n>0$$

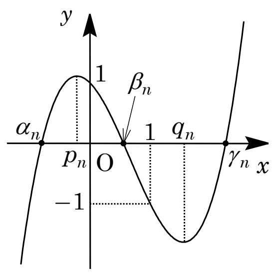
そこで，$f'(x)=0$ の 2 実数解を $x=p_n$，q_n $(p_n<q_n)$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。そして，$f(0)=1>0$ であり，

x	$\cdots$	p_n	$\cdots$	q_n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(1)=1-2n+2n-3+1=-1<0$$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ から，$f(x)=0$ は，$x<0$，$0<x<1$，$1<x$ に 1 つずつ，合わせて 3 つの実数解をもつ。

(3)　$f(x)=0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とし，他の 2 つの解を α_n，γ_n $(\alpha_n<\beta_n<\gamma_n)$ とおく。



ここで，(1)から，$\dfrac{1}{1-\beta_n}$ と $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\beta_n}}=1-\dfrac{1}{\beta_n}$ も解になり，

$0<\beta_n<1$ から，$\dfrac{1}{1-\beta_n}>1$，$1-\dfrac{1}{\beta_n}<0$ なので，

$$\alpha_n=1-\frac{1}{\beta_n},\quad \gamma_n=\frac{1}{1-\beta_n}$$

このとき，$f(q_n)<0$ から $\gamma_n>q_n$ $\left(\dfrac{1}{1-\beta_n}>q_n\right)$ となり，$\dfrac{1}{q_n}>1-\beta_n$ より，

$$1-\frac{1}{q_n}<\beta_n<1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$n\to\infty$ のとき，$1-\dfrac{1}{q_n}=1-\dfrac{3}{2n+\sqrt{(2n-3)^2+6n}}\to 1$ であるので，(*)から，

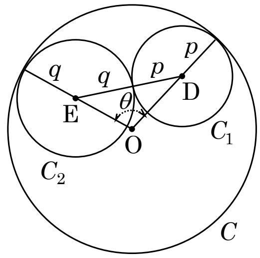
$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=1$$

［解 説］

3 次関数と 3 次方程式の解についての問題です。(2)では極値の符号を求める予定でしたが，計算難のため特別な値に注目しています。また，(3)は γ_n と q_n の関係に着目しましたが，他にもいろいろな方法があるでしょう。

4

問題のページへ



(1)　半径 1 で中心 O の円 C, 半径 p で中心 D の円 C_1，半径 q で中心 E の円 C_2 に対して，C_1 と C_2 が C に内接し，互いに外接しているとき，$\theta=\angle\mathrm{DOE}$ とおく。

このとき，$\mathrm{OD}=1-p$，$\mathrm{OE}=1-q$，$\mathrm{DE}=p+q$ から，△ODE に余弦定理を適用すると，

$$(p+q)^2=(1-p)^2+(1-q)^2-2(1-p)(1-q)\cos\theta$$
$$2pq=1-2p+1-2q-2(1-p-q+pq)\cos\theta$$

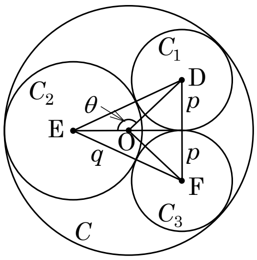
すると，$\{2+2p-2(1-p)\cos\theta\}q=2-2p-2(1-p)\cos\theta$ から，

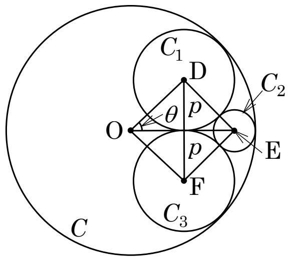
$$q=\frac{1-p-(1-p)\cos\theta}{1+p-(1-p)\cos\theta}=\frac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　p を固定して，θ を 0 に近づけるとき，

$$\frac{q}{\theta^2}=\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cos\theta}$$
$$=\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cos\theta}$$
$$\to 1^2\cdot\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cdot 1}=\frac{1-p}{4p}\quad(\theta\to 0)$$

(3)　$p=\sqrt{2}-1$ のとき，C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接するように，半径 p で中心 F の円 C_3 をとると，C_1，C_2，C_3 の位置関係は右図のようになり，





$$\mathrm{OD}=\mathrm{OF}=1-p=2-\sqrt{2}$$
$$\mathrm{DF}=2p=2\sqrt{2}-2$$

すると，$\mathrm{DF}=\sqrt{2}\,\mathrm{OD}$ から，△ODF は $\angle\mathrm{DOF}=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形となり，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ または $\theta=\frac{\pi}{4}$ である。

(i)　$\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-(\sqrt{2})^{-1}$ となり，$(*)$から，

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}=\frac{(2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

(ii)　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{-1}$ となり，$(*)$から，

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}=\frac{(2-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$$

(4)　(3)と同様に考えると，$\sin(\pi-\theta)=\dfrac{\mathrm{DF}}{2\mathrm{OD}}$ または $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{DF}}{2\mathrm{OD}}$ であり，ここで $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ に注意すると，いずれも $\sin\theta=\dfrac{p}{1-p}$ となる。

すると，$p(\sin\theta+1)=\sin\theta$ から $p=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}$ となり，(＊)より，

$$\frac{q}{p}=\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}\right)(1-\cos\theta)}{\left(1+\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}\right)-\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}\right)\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{(2\sin\theta+1)-\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{(2\sin\theta+1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{(\sin\theta+1)\sin\theta}{2\sin\theta(1+\cos\theta)+\sin^2\theta}=\frac{\sin\theta+1}{2(1+\cos\theta)+\sin\theta}$$

よって，$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{q}{p}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta+1}{2(1+\cos\theta)+\sin\theta}=\frac{1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}$ である。

［解　説］

2 円の関係を題材にした極限の問題ですが，記述量はかなり多めです。なお，(3)では 2 つのタイプがあることに要注意です。

5

問題のページへ

(1)　0 以上の整数 m，1 以上の整数 n，$0<t<1$ のとき，$F(m,\ n)=\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k$ に対して，$G(m,\ n)=(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)$ とおくと，

$$G(m,\ n)=(t-1)\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^k+t\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^k$$

$$=\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}-\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^k+\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^{k+1}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}-\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}+\sum_{k=m}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_m t^{k+1}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}-\sum_{k=m}^{m+n-1}({}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_k\mathrm{C}_m)t^{k+1}$$

$k=m$ のとき，${}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_k\mathrm{C}_m={}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_m\mathrm{C}_m=0$，$m+1\leqq k\leqq m+n-1$ のとき，${}_{k+1}\mathrm{C}_{m+1}-{}_k\mathrm{C}_m={}_k\mathrm{C}_{m+1}$ であるので，

$$G(m,\ n)=\sum_{k=m+1}^{m+n}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}-\sum_{k=m+1}^{m+n-1}{}_k\mathrm{C}_{m+1}t^{k+1}={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}$$

すると，$A=\dfrac{G(m,\ n)}{t^p}=\dfrac{{}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1}}{t^p}={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}t^{m+n+1-p}$ が，t によらない値となるのは $p=m+n+1$ のときで，このとき $A={}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}$ である。

(2)　${}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1}=A(m,\ n)$ とおくと，(1)から，$G(m,\ n)=A(m,\ n)t^{m+n+1}$ となり，

$$(t-1)F(m+1,\ n)+tF(m,\ n)=A(m,\ n)t^{m+n+1}$$

$$F(m+1,\ n)=\frac{t}{1-t}F(m,\ n)-A(m,\ n)\cdot\frac{t^{m+n+1}}{1-t}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$r=\dfrac{t}{1-t}$ とおくと，$0<t<1$ から $r>0$ となり，①より，

$$F(m+1,\ n)=rF(m,\ n)-A(m,\ n)\cdot rt^{m+n}\cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺を r^{m+1} で割り，$\dfrac{F(m+1,\ n)}{r^{m+1}}=\dfrac{F(m,\ n)}{r^m}-A(m,\ n)\cdot\dfrac{t^{m+n}}{r^m}$ から，

$$\frac{F(m+1,\ n)}{r^{m+1}}=\frac{F(m,\ n)}{r^m}-A(m,\ n)\cdot t^n(1-t)^m\cdots\cdots\cdots③$$

③から，$m\geqq 1$ において，$\dfrac{F(m,\ n)}{r^m}=\dfrac{F(0,\ n)}{r^0}-\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}A(k,\ n)\cdot t^n(1-t)^k$ となり，

$F(0,\ n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}{}_k\mathrm{C}_0t^k=\sum_{k=0}^{n-1}t^k=\frac{1-t^n}{1-t}\cdots\cdots$④を代入すると，

$$\frac{F(m,\ n)}{r^m}=\frac{1-t^n}{1-t}-\sum_{k=0}^{m-1}A(k,\ n)\cdot t^n(1-t)^k$$

$$F(m,\ n)=\frac{1-t^n}{1-t}\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^m-\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^m\sum_{k=0}^{m-1}{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}\cdot t^n(1-t)^k\cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ に対して，$0\leqq{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}\cdot t^n(1-t)^k$ であり，

$$ {}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}\cdot t^n(1-t)^k=\frac{(k+n)(k+n-1)(k+n-2)\cdots(n+1)n}{(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1}\cdot t^n(1-t)^k $$

$$ \leqq\frac{(k+n)^{k+1}}{2^k}\cdot t^n(1-t)^k\leqq\frac{(m-1+n)^{k+1}}{2^k}\cdot t^n(1-t)^k $$

そこで，$m-1\leqq n$ を満たす十分に大きな n をとると，

$$ \frac{(m-1+n)^{k+1}}{2^k}\cdot t^n(1-t)^k\leqq\frac{(2n)^{k+1}}{2^k}\cdot t^n(1-t)^k=2n^{k+1}t^n(1-t)^k $$

これより，$0\leqq {}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}\cdot t^n(1-t)^k\leqq 2n^{k+1}t^n(1-t)^k$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{k+1}t^n=0$ から，

$$ \lim_{n\to\infty}{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}\cdot t^n(1-t)^k=0 $$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}{}_{k+n}\mathrm{C}_{k+1}\cdot t^n(1-t)^k=0$ となり，さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}t^n=0$ なので，⑤から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(m,\ n)$ は収束し，その極限値は，

$$ \lim_{n\to\infty}F(m,\ n)=\frac{1}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^m=\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}\cdots\cdots\cdots⑥ $$

なお，④から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(0,\ n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-t^n}{1-t}=\frac{1}{1-t}$ となり，$m=0$ のときも⑥は成立している。

［解　説］

難度のかなり高い数列の極限についての問題です。(1)はシグマ記号を用いて解答例らしく記述していますが，その前の段階では項を羅列して方針を定めています。(2)の漸化式は階差数列を作る方法で処理しました。また，後半の二項係数の評価については，2009 年度に出題された論証問題が参考になります。なお，④式で ${}_0\mathrm{C}_0$ の値は 1 としています。