$\boxed{1}$

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x\, dx$ を求めよ。

(2)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(-1)$，$\mathrm{R}(\sqrt{3}-1-i)$ が正三角形をなすとき，複素数 z を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(3)　正の整数 n，p，q が，$p>q$ かつ ${}_p\mathrm{C}_2 + {}_q\mathrm{C}_1 = n$ を満たすとする。${}_m\mathrm{C}_2 \leqq n$ となる最大の整数 m を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の $2n$ 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y) \mid x = 1, 2, 3, \cdots, n,\ \ y = 1, 2\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選び，その 3 点を線分で結んで得られる図形の面積を X とする。ただし，3 点が同一直線上にあるときは $X = 0$ とする。

(1)　k が 0 以上の整数のとき，X が $\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k を n と k の式で表せ。

(2)　X が $\dfrac{n}{4}$ 以下となる確率を q_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=e^x+e^{-2x}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)　$f(x)=2$ となる x の値をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた x の値のうち最小のものを a_1，最大のものを a_2 とする。$y=f(x)$ のグラフ，x 軸，直線 $x=a_1$，直線 $x=a_2$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を正の整数とする。x の関数 $f(x)=x^3-2nx^2+(2n-3)x+1$ について以下の問いに答えよ。

(1)　α を $f(x)=0$ の 1 つの解とする。$f\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする。極限 $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

半径 1，中心 O の円 C がある。2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする。

・C_1 と C_2 はどちらも C に内接する。

・C_1 と C_2 は互いに外接する。

円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ D, E とし，半径をそれぞれ p, q とする。$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) q を p と θ を用いて表せ。

(2) p を固定する。θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ。

さらに，円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする。

・C_3 と C_1 は半径が等しい。

・C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する。

このとき以下の問いに答えよ。

(3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき，q の値を求めよ。

(4) θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{p}$ の極限値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$I=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}x^2\sin x\,dx$ とおき，部分積分を実行すると，

$$I=-\left[x^2\cos x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}+\int_0^{\frac{2\pi}{3}}2x\cos x\,dx$$

$$=-\frac{4\pi^2}{9}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\left[x\sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}-2\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\,dx$$

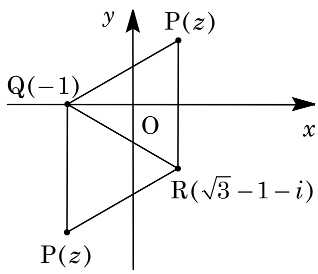
$$=\frac{2\pi^2}{9}+2\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\left[\cos x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi^2}{9}+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}+2\left(-\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{2\pi^2}{9}+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}-3$$

(2)　$\mathrm{P}(z)$ は，$\mathrm{R}(\sqrt{3}-1-i)$ を $\mathrm{Q}(-1)$ のまわりに $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点なので，

$$z-(-1)=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(\sqrt{3}-1-i)-(-1)\}$$

$$z=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)-1$$



(i)　$z=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)-1$ のとき

$$z=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+2i)-1=\sqrt{3}-1+i$$

(ii)　$z=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)-1$ のとき

$$z=\frac{1}{2}(-4i)-1=-1-2i$$

(3)　正の整数 $n, p, q\ (p>q)$ に対し，${}_p\mathrm{C}_2+{}_q\mathrm{C}_1=n$ より $\frac{p(p-1)}{2}+q=n$ ………①

また，${}_m\mathrm{C}_2\leqq n$ より $\frac{m(m-1)}{2}\leqq n$ ………②

①②より，$\frac{m(m-1)}{2}\leqq\frac{p(p-1)}{2}+q$ となり，$m(m-1)\leqq p(p-1)+2q$ ………③

・ $m=p$ のとき　$2q>0$ なので③は成立する。

・ $m\geqq p+1$ のとき

$$m(m-1)-\{p(p-1)+2q\}\geqq(p+1)p-(p^2-p+2q)=2(p-q)>0$$

すると，③は成立しない。

以上より，③を満たす最大の整数 m は，$m=p$ である。

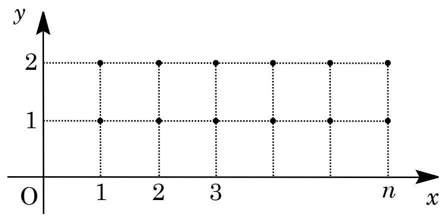
［解 説］

(1)が定積分の計算，(2)が複素数平面，(3)が整数という独立した 3 つの小問で構成されています。(1)と(2)は基本事項の確認，また(3)は結論を予想して処理をしています。

2

問題のページへ

(1)　$n \geqq 3$ のとき，右図の $2n$ 個の点から異なる 3 点を選び，それを線分で結んで得られる図形の面積 X について，k を 0 以上の整数とするとき，$X=\dfrac{k}{2}$ となる確率 p_k は，



(i)　$k=0$ のとき

3 点が $y=1$ 上のある場合，または 3 点が $y=2$ 上にある場合より，

$$p_0=\frac{{}_n\mathrm{C}_3\times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{2n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{n-2}{2(2n-1)}$$

(ii)　$k \geqq 1$ のとき

2 点が $y=1$ 上で 1 点が $y=2$ 上にある場合について，3 点の座標を $(a,\ 1)$，$(b,\ 1)$，$(c,\ 2)$ とおく。ただし，$1 \leqq a < b \leqq n$，$1 \leqq c \leqq n$ である。

このとき，$X=\dfrac{1}{2}(b-a)\cdot 1=\dfrac{b-a}{2}$ となり，$X=\dfrac{k}{2}$ であるのは $b-a=k$ から，

$$(a,\ b)=(1,\ k+1),\ (2,\ k+2),\ \cdots\cdots,\ (n-k,\ n)$$

すると，$(a,\ b)$ の選び方は $n-k$ 通り，また c の選び方は n 通りである。

また，2 点が $y=2$ 上で 1 点が $y=1$ 上にある場合についても同様なので，

$$p_k=\frac{(n-k)n\times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}=\frac{6\cdot 2n(n-k)}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}$$

なお，$\dfrac{k}{2} \geqq \dfrac{1}{2}n$ すなわち $k \geqq n$ のときは，$p_k=0$ である。

(i)(ii)より，$p_0=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$，$p_k=\dfrac{3(n-k)}{(n-1)(2n-1)}\ (1 \leqq k \leqq n-1)$，$p_k=0\ (k \geqq n)$

(2)　$X \leqq \dfrac{n}{4}$ となるのは，(1)から $\dfrac{k}{2} \leqq \dfrac{n}{4}\left(k \leqq \dfrac{n}{2}\right)$ が対応するので，その確率 q_n は，

(a)　n が偶数のとき

$$\begin{aligned} q_n &= p_0+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} p_k=\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n-k) \\ &= \frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\left\{n\cdot\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\} \\ &= \frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{(n-1)(2n-1)}\cdot\frac{n}{8}\{4n-(n+2)\} \\ &= \frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3n(3n-2)}{8(n-1)(2n-1)}=\frac{1-\frac{2}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\frac{3\left(3-\frac{2}{n}\right)}{8\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{13}{16}$ となる。

(b)　n が奇数のとき

$$q_n = p_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} p_k = \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3}{(n-1)(2n-1)} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (n-k)$$

$$= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3}{(n-1)(2n-1)} \left\{ n \cdot \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \right\}$$

$$= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3}{(n-1)(2n-1)} \cdot \frac{n-1}{8} \{4n-(n+1)\}$$

$$= \frac{n-2}{2(2n-1)} + \frac{3(3n-1)}{8(2n-1)} = \frac{1-\frac{2}{n}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)} + \frac{3\left(3-\frac{1}{n}\right)}{8\left(2-\frac{1}{n}\right)}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16}$ となる。

(a)(b)より，n の偶奇にかかわらず，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{13}{16}$ である。

［解　説］

確率と数列の融合問題です。基本的な内容ですが，計算量は多めです。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x+e^{-2x}$ に対して，$f'(x)=e^x-2e^{-2x}=e^{-2x}(e^{3x}-2)$

ここで，$f'(x)=0$ となるのは $e^{3x}=2$，すなわち $e^x=\sqrt[3]{2}$ から $x=\dfrac{1}{3}\log 2$ のときであり，これをもとに $f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)$ の最小値は,

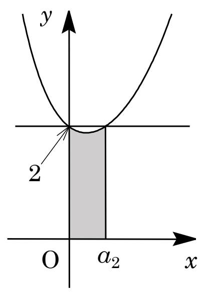
$$f\Big(\frac{1}{3}\log 2\Big)=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

(2)　$f(x)=2$ から $e^x+e^{-2x}=2$ となり，$e^{3x}+1=2e^{2x}$ より，

$$e^{3x}-2e^{2x}+1=0,\ (e^x-1)(e^{2x}-e^x-1)=0$$

$e^x>0$ なので，$e^x=1,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となり，$x=0,\ \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3)　$a_1=0$，$a_2=\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$y=f(x)$ のグラフ, x 軸, 直線 $x=a_1$, 直線 $x=a_2$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は,



$$V=\pi\int_0^{a_2}(e^x+e^{-2x})^2dx=\pi\int_0^{a_2}(e^{2x}+2e^{-x}+e^{-4x})dx$$

$$=\pi\Big[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\Big]_0^{a_2}$$

$$=\pi\Big\{\frac{1}{2}(e^{2a_2}-1)-2(e^{-a_2}-1)-\frac{1}{4}(e^{-4a_2}-1)\Big\}$$

$$=\pi\Big(\frac{1}{2}e^{2a_2}-2e^{-a_2}-\frac{1}{4}e^{-4a_2}+\frac{7}{4}\Big)$$

$e^{a_2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$e^{2a_2}=\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$e^{4a_2}=\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^2=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$

$$e^{-a_2}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ e^{-4a_2}=\frac{2}{7+3\sqrt{5}}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

よって，$V=\pi\Big(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}+\dfrac{7}{4}\Big)=\dfrac{21-3\sqrt{5}}{8}\pi$ となる。

［解 説］

回転体の体積を求める基本題です。ただ，数値計算はかなり面倒ですが。

$\boxed{4}$　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-2nx^2+(2n-3)x+1$ に対し，$f(x)=0$ の 1 つの解を α とするとき，

$$f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3-2n\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2+(2n-3)\cdot\frac{1}{1-\alpha}+1$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)^3}\{1-2n(1-\alpha)+(2n-3)(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3\}$$

$$=\frac{1}{(1-\alpha)^3}\{-1-(2n-3)\alpha+2n\alpha^2-\alpha^3\}=-\frac{f(\alpha)}{(1-\alpha)^3}=0$$

(2)　$f'(x)=3x^2-4nx+2n-3$ となり，$f'(x)=0$ の判別式 D は，$n\geqq 1$ から，

$$D/4=4n^2-3(2n-3)=4n^2-6n+9=(2n-3)^2+6n>0$$

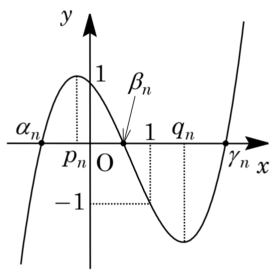
そこで，$f'(x)=0$ の 2 実数解を $x=p_n$，q_n $(p_n<q_n)$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。そして，$f(0)=1>0$ であり，

x	$\cdots$	p_n	$\cdots$	q_n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(1)=1-2n+2n-3+1=-1<0$$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ から，$f(x)=0$ は，$x<0$，$0<x<1$，$1<x$ に 1 つずつ，合わせて 3 つの実数解をもつ。

(3)　$f(x)=0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とし，他の 2 つの解を α_n，γ_n $(\alpha_n<\beta_n<\gamma_n)$ とおく。



ここで，(1)から，$\dfrac{1}{1-\beta_n}$ と $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\beta_n}}=1-\dfrac{1}{\beta_n}$ も解になり，

$0<\beta_n<1$ から，$\dfrac{1}{1-\beta_n}>1$，$1-\dfrac{1}{\beta_n}<0$ なので，

$$\alpha_n=1-\frac{1}{\beta_n},\quad \gamma_n=\frac{1}{1-\beta_n}$$

このとき，$f(q_n)<0$ から $\gamma_n>q_n\left(\dfrac{1}{1-\beta_n}>q_n\right)$ となり，$\dfrac{1}{q_n}>1-\beta_n$ より，

$$1-\frac{1}{q_n}<\beta_n<1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$n\to\infty$ のとき，$1-\dfrac{1}{q_n}=1-\dfrac{3}{2n+\sqrt{(2n-3)^2+6n}}\to 1$ であるので，(*)から，

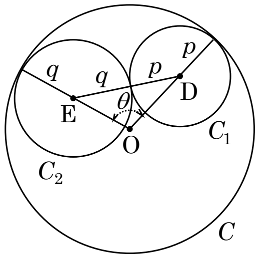
$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=1$$

［解　説］

3 次関数と 3 次方程式の解についての問題です。(2)では極値の符号を求める予定でしたが，計算難のため特別な値に注目しています。また，(3)は γ_n と q_n の関係に着目しましたが，他にもいろいろな方法があるでしょう。

5

問題のページへ



(1)　半径 1 で中心 O の円 C, 半径 p で中心 D の円 C_1，半径 q で中心 E の円 C_2 に対して，C_1 と C_2 が C に内接し，互いに外接しているとき，$\theta=\angle\mathrm{DOE}$ とおく。

このとき，$\mathrm{OD}=1-p$，$\mathrm{OE}=1-q$，$\mathrm{DE}=p+q$ から，$\triangle\mathrm{ODE}$ に余弦定理を適用すると，

$$(p+q)^2=(1-p)^2+(1-q)^2-2(1-p)(1-q)\cos\theta$$

$$2pq=1-2p+1-2q-2(1-p-q+pq)\cos\theta$$

すると，$\{2+2p-2(1-p)\cos\theta\}q=2-2p-2(1-p)\cos\theta$ から，

$$q=\frac{1-p-(1-p)\cos\theta}{1+p-(1-p)\cos\theta}=\frac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

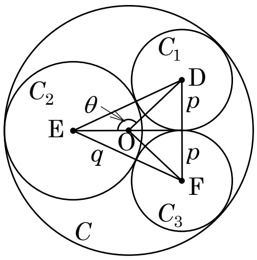
(2)　p を固定して，θ を 0 に近づけるとき，

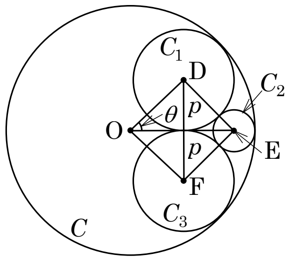
$$\frac{q}{\theta^2}=\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cos\theta}$$

$$=\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cos\theta}$$

$$\to 1^2\cdot\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1-p}{1+p-(1-p)\cdot 1}=\frac{1-p}{4p}\quad(\theta\to 0)$$

(3)　$p=\sqrt{2}-1$ のとき，C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接するように，半径 p で中心 F の円 C_3 をとると，C_1，C_2，C_3 の位置関係は右図のようになり，





$$\mathrm{OD}=\mathrm{OF}=1-p=2-\sqrt{2}$$

$$\mathrm{DF}=2p=2\sqrt{2}-2$$

すると，$\mathrm{DF}=\sqrt{2}\,\mathrm{OD}$ から，$\triangle\mathrm{ODF}$ は $\angle\mathrm{DOF}=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形となり，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ または $\theta=\frac{\pi}{4}$ である。

(i)　$\theta=\frac{3}{4}\pi$ のとき　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-(\sqrt{2})^{-1}$ となり，(＊)から，

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}=\frac{(2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

(ii)　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{-1}$ となり，(＊)から，

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})^{-1}}=\frac{(2-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$$

(4)　(3)と同様に考えると，$\sin(\pi-\theta)=\dfrac{\mathrm{DF}}{2\mathrm{OD}}$ または $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{DF}}{2\mathrm{OD}}$ であり，ここで

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ に注意すると，いずれも $\sin\theta=\dfrac{p}{1-p}$ となる。

すると，$p(\sin\theta+1)=\sin\theta$ から $p=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}$ となり，(＊)より，

$$\frac{q}{p}=\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}\right)(1-\cos\theta)}{\left(1+\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}\right)-\left(1-\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+1}\right)\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{(2\sin\theta+1)-\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{(2\sin\theta+1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{(\sin\theta+1)\sin\theta}{2\sin\theta(1+\cos\theta)+\sin^2\theta}=\frac{\sin\theta+1}{2(1+\cos\theta)+\sin\theta}$$

よって，$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{q}{p}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta+1}{2(1+\cos\theta)+\sin\theta}=\frac{1}{2\cdot2}=\frac{1}{4}$ である。

［解　説］

2 円の関係を題材にした極限の問題ですが，記述量はかなり多めです。なお，(3)ではの 2 つのタイプがあることに要注意です。