**1**

解答例のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) $12^{77}$ の桁数および最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ ，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(2) $a$ を実数とする。方程式 $x^3-3ax+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$ が虚数解をもつ $a$ の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　1 個のさいころを 4 回投げるとき，出る目の総和が 21 以上になる確率を求めよ。

(2)　1 個のさいころを 5 回投げるとき，出る目の総和が 10 以上になる確率を求めよ。

**3**

解答例のページへ

座標平面上に 3 点 $A(0,\ 2)$，$B(-\sqrt{3},\ -1)$，$C(\sqrt{3},\ -1)$ があり，三角形 ABC の内接円上に点 P がある。また，2 点 D，E を $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{CE}$ となるようにとる。ここで O は原点 $(0,\ 0)$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　内積の値 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}$ が点 P の位置によらず一定であることを示し，その値を求めよ。

(2)　線分 DE の中点を M とする。点 P が三角形 ABC の内接円上を 1 周するとき，点 M の軌跡を求めよ。

**1**　　問題のページへ

(1)　$n=12^{77}$ とおき，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とすると，

$$\log_{10}n=77\log_{10}12=77(2\log_{10}2+\log_{10}3)=77\times(2\times0.3010+0.4771)$$
$$=83.0907$$

すると，$83<\log_{10}n<83+\log_{10}2$ となり，$10^{83}<n<10^{83+\log_{10}2}$ から，

$$1\cdot10^{83}<n<2\cdot10^{83}$$

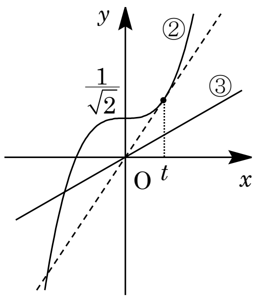
これより，$n=12^{77}$ は 84 桁で，最高位の数字は 1 である。

(2)　$a$ が実数で，方程式 $x^3-3ax+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ ……①が虚数解をもつとき，その虚数解を $\alpha$ とおくと，共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解となる。もう 1 つの解 $\beta$ は，解と係数の関係より，$\alpha+\overline{\alpha}+\beta=0$ から $\beta=-(\alpha+\overline{\alpha})$ となり，$\beta$ は実数である。

すると，①が虚数解をもつことは①の実数解が 1 つであることに対応し，逆に①の実数解が 1 つであるとき，①は 3 重解をもたないことより虚数解が存在する。

さて，①を $x^3+\frac{1}{\sqrt{2}}=3ax$ と変形して，

$$y=x^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots②,\quad y=3ax\ \cdots\cdots③$$




以下, 3 次曲線②と原点を通る直線③が，共有点をただ 1 つもつ条件を調べる。

そこで，②と③が接するときの $a$ の値を求めるために，②の接点の $x$ 座標を $t$ とおくと，②から $y'=3x^2$ なので，接線の方程式は $y-\left(t^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3t^2(x-t)$ となり，$y=3t^2x-2t^3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ………④

④が原点を通ることより，$-2t^3+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ から，$2\sqrt{2}t^3-1=0$ となり，

$$(\sqrt{2}t-1)(2t^2+\sqrt{2}t+1)=0$$

$2t^2+\sqrt{2}t+1=0$ は実数解をもたないので，$\sqrt{2}t-1=0$ から $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

これより，原点を通る接線は，④から $y=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2x=\frac{3}{2}x$ である。

したがって，曲線②と直線③が共有点をただ 1 つもつ，すなわち方程式①が虚数解をもつ $a$ の範囲は，右上図から $3a<\frac{3}{2}$ となり，$a<\frac{1}{2}$ である。

## ［コメント］

(1)は対数計算についての頻出有名問題です。(2)は微分の方程式への応用問題です。場合分けを避けるために与えられた方程式を変形し，図形的に処理しています。


© 電送数学舎 2025

**2**

問題のページへ

(1)　さいころを 4 回投げるとき，出る目の総和が 21 以上になるのは，6 の出る回数が 1 回以上，4 回以下なので，その場合の数は，

(i)　6 の出る回数が 4 回のとき　$\{6,\ 6,\ 6,\ 6\}$より，1 通りとなる。

(ii)　6 の出る回数が 3 回のとき

$\{6,\ 6,\ 6,\ 3\}$，$\{6,\ 6,\ 6,\ 4\}$，$\{6,\ 6,\ 6,\ 5\}$より，$\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{3!}=12$ 通りとなる。

(iii) 6 の出る回数が 2 回のとき

$\{6,\ 6,\ 5,\ 5\}$，$\{6,\ 6,\ 5,\ 4\}$より，$\dfrac{4!}{2!2!}+\dfrac{4!}{2!}=18$ 通りとなる。

(iv) 6 の出る回数が 1 回のとき　$\{6,\ 5,\ 5,\ 5\}$より，$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通りとなる。

(i)～(iv)より，出る目の総和が 21 以上になる確率は$\dfrac{1+12+18+4}{6^4}=\dfrac{35}{1296}$である。

(2)　さいころを 5 回投げるとき，出る目の総和が 9 以下になるのは，1 の出る回数が 1 回以上，5 回以下なので，その場合の数は，

(i)　1 の出る回数が 5 回のとき　$\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\}$より，1 通りとなる。

(ii)　1 の出る回数が 4 回のとき

$\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2\}$，$\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3\}$，$\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4\}$，$\{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 5\}$より，

$$\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{4!}=20 \text{ 通り}$$

(iii) 1 の出る回数が 3 回のとき

$\{1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2\}$，$\{1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$\{1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3\}$より，

$$\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!2!}=60 \text{ 通り}$$

(iv) 1 の出る回数が 2 回のとき

$\{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2\}$，$\{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3\}$より，$\dfrac{5!}{2!3!}+\dfrac{5!}{2!2!}=40$ 通りとなる。

(v)　1 の出る回数が 1 回のとき　$\{1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\}$より，$\dfrac{5!}{4!}=5$ 通りとなる。

(i)～(v)より，出る目の総和が 9 以下になる確率は$\dfrac{1+20+60+40+5}{6^5}=\dfrac{7}{432}$である。

したがって，さいころを 5 回投げるとき，出る目の総和が 10 以上になる確率は，

$$1-\frac{7}{432}=\frac{425}{432}$$

［コメント］

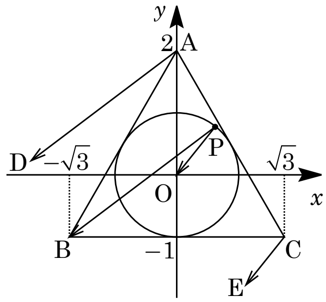
丁寧に数え上げるタイプの確率問題です。(2)は余事象を利用しています。



© 電送数学舎 2025

$\boxed{3}$

問題のページへ




(1)　3 点 $A(0,\ 2)$，$B(-\sqrt{3},\ -1)$，$C(\sqrt{3},\ -1)$ を頂点とする△ABC に対して，内接円の半径を $r$ とおくと，

$AB=BC=CA=2\sqrt{3}$ から，

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3})r=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3$$

これより $r=1$ となり，内接円は中心が原点の単位円から，円上の点を $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくことができる。

さて，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{CE}$ から，

$$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}=(-\sqrt{3}-\cos\theta,\ -1-\sin\theta)+(-\cos\theta,\ 2-\sin\theta)$$
$$=(-\sqrt{3}-2\cos\theta,\ 1-2\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PC}=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)+(\sqrt{3}-\cos\theta,\ -1-\sin\theta)$$
$$=(\sqrt{3}-2\cos\theta,\ -1-2\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(-\sqrt{3}-2\cos\theta)(\sqrt{3}-2\cos\theta)+(1-2\sin\theta)(-1-2\sin\theta)$$
$$=-3+4\cos^2\theta-1+4\sin^2\theta=-4+4=0$$

(2)　線分 DE の中点を M とすると，$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE})=(-2\cos\theta,\ -2\sin\theta)$ となり，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=(\cos\theta,\ \sin\theta)+(-2\cos\theta,\ -2\sin\theta)=-(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

したがって，$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OP}$ となり，点 P が△ABC の内接円上を 1 周するとき，点 M もこの内接円上を 1 周することより，点 M の軌跡は円 $x^2+y^2=1$ である。

## ［コメント］

平面ベクトルの基本題です。問題の見た目はややこしそうですが。



© 電送数学舎 2025