1

解答例のページへ

さいころを投げて座標平面上の点 P を動かす試行を繰り返す。最初の点 P の位置は原点であるとする。1 回の試行では 1 個のさいころを投げて，出た目に応じて以下の規則により点 P を動かす。

・1 または 2 が出れば，点 P を x 軸方向に $+1$ だけ動かす。

・3 または 4 が出れば，点 P を y 軸方向に $+1$ だけ動かす。

・5 または 6 が出れば，点 P を y 軸方向に -1 だけ動かす。

n 回目の試行直後の点 P の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x_6 = y_6 = 0$ となる確率を求めよ。

(2) $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。

(3) $y_1,\ \cdots,\ y_5$ がすべて 0 以上で，かつ $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。

2

解答例のページへ

座標平面上に，曲線 $D: y=\log x\ (x>0)$ とその上の点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$ がある。半径 r の円 C は y 軸に接し，かつ，円 C は曲線 D と点 A で同一の接線をもつ。さらに，$r<a$ が成り立つとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) r を a を用いて表せ。

(2) $r>\dfrac{a}{2}$ となることを示せ。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき，x 軸，y 軸，円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積を求めよ。

3

解答例のページへ

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)=\dfrac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)=0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(2)　$f''(x)=0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(3)　$y=f(x)$ の凹凸，変曲点，ならびに漸近線を調べて，そのグラフの概形を描け。

(4)　点 $(0,\ t)$ から曲線 $y=f(x)$ に接線が引けるような実数 t の範囲を求めよ。

4

解答例のページへ

正方形に対して，その 2 本の対角線の交点を，その正方形の中心と呼ぶ。また，すべての内角が180°未満の四角形を凸四角形と呼ぶ。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上に正方形 PQRS があり，その中心 T から見て 4 点 P, Q, R, S は反時計回りに並んでいる。頂点 P，Q の座標を表す複素数を p，q とするとき，中心 T の座標を表す複素数 t を p, q を用いて表せ。

(2)　複素数平面上に凸四角形 ABCD がある。頂点 A，B，C，D の座標を表す複素数はそれぞれ α，β，γ，δ とする。四角形 ABCD の外側に線分 AB を 1 辺とする正方形を描きその中心を X とする。同様に，ABCD の外側に線分 BC を 1 辺とする正方形を描きその中心を Y とし，ABCD の外側に線分 CD を 1 辺とする正方形を描きその中心を Z とし，ABCD の外側に線分 DA を 1 辺とする正方形を描きその中心を W とする。このとき，XZ＝YW であり，かつ，直線 XZ と直線 YW が直交することを証明せよ。

(3)　(2)において，線分 XZ と線分 YW がそれらの中点で交わるとき，四角形 ABCD はどのような四角形になるか。理由とともに述べよ。

$\boxed{5}$

解答例のページへ

関数 $f(x)$ は 3 次導関数 $f'''(x)$ をもち，$f'(0)=0$ であり，すべての実数 x に対して $f''(x)>0$，$f'''(x)<0$ を満たすものとする。また，$0<a<b$ とし，

$$F=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)dx$$

とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$F>0$ を示せ。

(2)　$F<\frac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}(b-a)$ を示せ。

(3)　$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)<\frac{b-a}{2}f'(b)$ を示せ。

(4)　$F<\frac{(b-a)^3}{4}f''(a)$ を示せ。

1

問題のページへ

最初，原点にある点 P を動かす試行について，x 軸方向に $+1$ は「→」，y 軸方向に $+1$ は「↑」，y 軸方向に -1 は「↓」と記し，n 回目の試行直後には $P(x_n,\ y_n)$ にあるとする。なお，この 3 つの事象の確率は，いずれも $\frac{1}{3}$ である。

(1)　$x_6 = y_6 = 0$ となるのは，「→」が 0 回，「↑」が 3 回，「↓」が 3 回より，その確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{20}{729}$$

(2)　$y_6 = 0$ となるのは，「↑」と「↓」が同じ回数であることに注意すると，

(i)　「→」が 0 回，「↑」が 3 回，「↓」が 3 回のとき　確率は，(1)より $\frac{20}{729}$

(ii)　「→」が 2 回，「↑」が 2 回，「↓」が 2 回のとき　確率は，$\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{90}{729}$

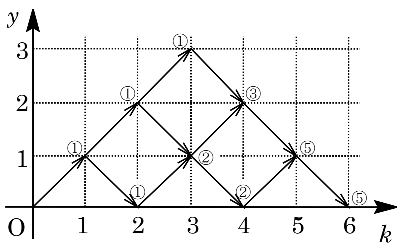
(iii)　「→」が 4 回，「↑」が 1 回，「↓」が 1 回のとき　確率は，$\frac{6!}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{30}{729}$

(iv)　「→」が 6 回，「↑」が 0 回，「↓」が 0 回のとき　確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

(i)～(iv)より，$y_6 = 0$ となる確率は，$\frac{20}{729} + \frac{90}{729} + \frac{30}{729} + \frac{1}{729} = \frac{47}{243}$ である。

(3)　$y_1 \geqq 0$，$y_2 \geqq 0$，$y_3 \geqq 0$，$y_4 \geqq 0$，$y_5 \geqq 0$ かつ $y_6 = 0$ となるとき，試行の回数 k と点 P の y 座標の関係をまとめると，右図のようになる。

なお，丸数字は条件に適する「↑」と「↓」の経路数を表す。



(i)　「→」が 0 回，「↑」が 3 回，「↓」が 3 回のとき

「↑」と「↓」について 5 通りの場合があり，確率は $5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{5}{729}$ となる。

(ii)　「→」が 2 回，「↑」が 2 回，「↓」が 2 回のとき

「↑」と「↓」について 2 通りの場合があり，確率は ${}_6C_2\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{30}{729}$ となる。

(iii)　「→」が 4 回，「↑」が 1 回，「↓」が 1 回のとき

「↑」と「↓」について 1 通りの場合があり，確率は ${}_6C_4\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{15}{729}$ となる。

(iv)　「→」が 6 回，「↑」が 0 回，「↓」が 0 回のとき　確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$ となる。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\frac{5}{729} + \frac{30}{729} + \frac{15}{729} + \frac{1}{729} = \frac{17}{243}$ である。

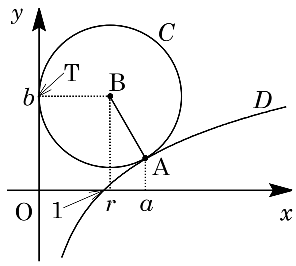
［コメント］

ランダムウォークを題材にした確率問題です。(3)は与えられた条件がきついので，グラフを用いて場合の数を数えています。なお，2010 年に類題が出ています。

2

問題のページへ

(1)　曲線 $D: y=\log x$ ……①上の点 $\mathrm{A}(a,\ \log a)$ に対し，y 軸に接する半径 r の円 C の中心を $\mathrm{B}(r,\ b)$ とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a-r,\ \log a-b)$$

ここで，C と D は点 A で接するので，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=r$ から，

$$(a-r)^2+(\log a-b)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

また，①から $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 A における接線の方向ベクトル $\vec{u}$ は，$\vec{u}=\left(1,\ \dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}(a,\ 1)$ と表せるので，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ から，

$$a(a-r)+(\log a-b)=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③から，$(a-r)^2+a^2(a-r)^2=r^2$ となり，$(1+a^2)(a-r)^2=r^2$

さらに，$r<a$ から $\sqrt{1+a^2}\,(a-r)=r$ なので，$\left(\sqrt{1+a^2}+1\right)r=a\sqrt{1+a^2}$ より，

$$r=\frac{a\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}+1}=\frac{a\sqrt{1+a^2}\left(\sqrt{1+a^2}-1\right)}{(1+a^2)-1}=\frac{1+a^2-\sqrt{1+a^2}}{a} \cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　$$r-\frac{a}{2}=\frac{1+a^2-\sqrt{1+a^2}}{a}-\frac{a}{2}=\frac{2+a^2-2\sqrt{1+a^2}}{2a}=\frac{(2+a^2)^2-4(1+a^2)}{2a\left(2+a^2+2\sqrt{1+a^2}\right)}$$

$$=\frac{a^4}{2a\left(2+a^2+2\sqrt{1+a^2}\right)}>0$$

これより，$r>\dfrac{a}{2}$ となる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，④から $r=\dfrac{1+3-\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ となり，③から，

$$b=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\log\sqrt{3}=1+\log\sqrt{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \log\sqrt{3}-1-\log\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=r(-1,\ 0)$ から，

$$\cos\angle\mathrm{ABT}=\frac{-1}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+0}}=-\frac{1}{2},\ \angle\mathrm{ABT}=\frac{2}{3}\pi$$

これより，x 軸，y 軸，円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積 S は，

$$S=ab-\frac{1}{2}(a-r)(b-\log a)-\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\int_1^a \log x\,dx$$

$$=ab-\frac{1}{2}(a-r)\cdot a(a-r)-\frac{1}{3}\pi r^2-\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^a$$

$$=\sqrt{3}\,(1+\log\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{4}{3}-\sqrt{3}\log\sqrt{3}+\sqrt{3}-1$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{4}{9}\pi-1=\frac{11}{6}\sqrt{3}-\frac{4}{9}\pi-1$$

［コメント］

曲線と円が接するときの面積計算の問題です。方針に迷うことはないでしょうが，計算は見かけより面倒です。

3　問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}}=(16-x^2)(x^4-2x^2+16)^{-\frac{1}{2}}$ に対して,

$$f'(x)=-2x(x^4-2x^2+16)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(16-x^2)(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}(4x^3-4x)$$
$$=-2x(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}\{(x^4-2x^2+16)+(16-x^2)(x^2-1)\}$$
$$=-2x(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}\cdot 15x^2=-30x^3(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}$$

これより，$f'(x)=0$ を満たす x は，$x=0$ である。

(2)　$f''(x)=-90x^2(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}+30x^3\cdot\dfrac{3}{2}(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}(4x^3-4x)$

$$=-90x^2(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}\{(x^4-2x^2+16)-x(2x^3-2x)\}$$
$$=90x^2(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}(x^4-16)$$
$$=90x^2(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}$$

これより，$f''(x)=0$ を満たす x は，$x=0,\ \pm 2$ である。

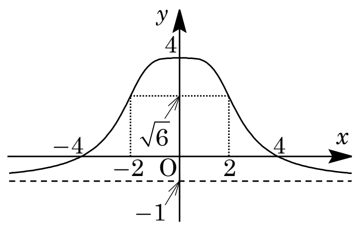
(3)　$f(-x)=\dfrac{16-(-x)^2}{\sqrt{(-x)^4-2(-x)^2+16}}=f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となり，以下，$x\geqq 0$ において増減と凹凸を調べる。

すると，右表のようになり，

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	$\sqrt{6}$	↘

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{16}{x^2}-1}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{16}{x^4}}}=-1$$

そこで，$x\leqq 0$ の部分は $x\geqq 0$ の部分を y 軸対称すると，$y=f(x)$ のグラフは，$-2<x<2$ で上に凸，$x<-2,\ 2<x$ で下に凸となり，変曲点の座標は $(-2,\ \sqrt{6})$ と $(2,\ \sqrt{6})$ である。漸近線は $y=-1$ であり，グラフの概形は右図の実線のようになる。



(4)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(u,\ f(u))$ における接線の方程式は,

$$y-f(u)=f'(u)(x-u),\quad y=f'(u)x+f(u)-uf'(u)$$

点 $(0,\ t)$ を通ることより，$t=f(u)-uf'(u)\cdots\cdots\cdots(*)$

ここで，$g(u)=f(u)-uf'(u)$ とおくと，$(*)$を満たす実数 t の範囲は，対称性を考えると，$u\geqq 0$ のときの $g(u)$ の範囲が対応し,

$$g'(u)=f'(u)-f'(u)-uf''(u)=-uf''(u)$$

$$=-90u^3(u+2)(u-2)(u^2+4)(u^4-2u^2+16)^{-\frac{5}{2}}$$

すると，$u\geqq 0$ における $g(u)$ の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{u\to\infty}f(u)=-1$ で，

u	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(u)$	0	$+$	0	$-$
$g(u)$	4	$\nearrow$	$\frac{8}{3}\sqrt{6}$	$\searrow$

$$\lim_{u\to\infty}uf'(u)=\lim_{u\to\infty}\frac{-30u^4}{\sqrt{(u^4-2u^2+16)^3}}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{-30}{\sqrt{\dfrac{(u^4-2u^2+16)^3}{u^8}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{-30}{\sqrt{u^4\left(1-\dfrac{2}{u^2}+\dfrac{16}{u^4}\right)^3}}=0$$

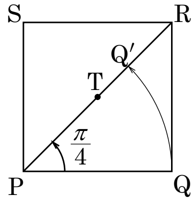
すると，$\displaystyle\lim_{u\to\infty}g(u)=\lim_{u\to\infty}\{f(u)-uf'(u)\}=-1-0=-1$ から，$-1<g(u)\leqq\dfrac{8}{3}\sqrt{6}$ となり，(*)から実数 t の範囲は $-1<t\leqq\dfrac{8}{3}\sqrt{6}$ である。

［コメント］

微分と増減についての問題ですが，計算は半端な量ではありません。そのためずいぶん時間を費やし，疲労も蓄積します。

4

問題のページへ

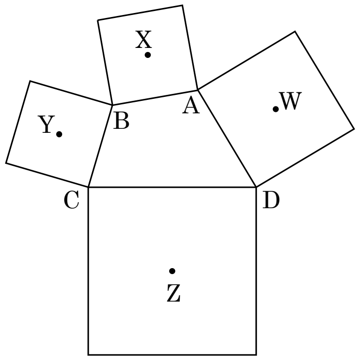


(1)　複素数平面上で反時計回りに並んでいる 4 点 P, Q, R, S が頂点である正方形 PQRS の中心を T とする。このとき，$\angle\mathrm{QPT}=\dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{PT}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{PQ}$ から，中心 $\mathrm{T}(t)$ は，点 $\mathrm{Q}(q)$ を点 $\mathrm{P}(p)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，その距離を $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点より，

$$t-p=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)(q-p)=\frac{1+i}{2}(q-p)$$

すると，$t=p+\dfrac{1+i}{2}(q-p)=\dfrac{1-i}{2}p+\dfrac{1+i}{2}q$ となる。

(2) 反時計回りに並んでいる 4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$ が頂点である凸四角形 ABCD について，右図のように，四角形 ABCD の外側に 4 つの正方形を描き，その中心を $\mathrm{X}(x)$，$\mathrm{Y}(y)$，$\mathrm{Z}(z)$，$\mathrm{W}(w)$ とおく。



ここで，(1)の結果を利用すると，

$$x=\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1+i}{2}\alpha,\ \ y=\frac{1-i}{2}\gamma+\frac{1+i}{2}\beta$$

$$z=\frac{1-i}{2}\delta+\frac{1+i}{2}\gamma,\ \ w=\frac{1-i}{2}\alpha+\frac{1+i}{2}\delta$$

すると，$z-x=\dfrac{1-i}{2}(\delta-\beta)+\dfrac{1+i}{2}(\gamma-\alpha)$，$w-y=\dfrac{1-i}{2}(\alpha-\gamma)+\dfrac{1+i}{2}(\delta-\beta)$

$$i(z-x)=\frac{i+1}{2}(\delta-\beta)+\frac{i-1}{2}(\gamma-\alpha)=\frac{1-i}{2}(\alpha-\gamma)+\frac{1+i}{2}(\delta-\beta)=w-y$$

したがって，$\dfrac{w-y}{z-x}=i$ から，$\dfrac{|w-y|}{|z-x|}=1$ かつ $\arg\dfrac{w-y}{z-x}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\mathrm{XZ}=\mathrm{YW}$ かつ直線 XZ と直線 YW は直交する。

なお，4 点 A, B, C, D が時計回りに並んでいるときは，i を $-i$ に置き換えれば同様に示すことができる。

(3)　線分 XZ と線分 YW が中点で交わるとき，$\dfrac{x+z}{2}=\dfrac{y+w}{2}$ から，

$$\frac{1-i}{2}(\beta+\delta)+\frac{1+i}{2}(\alpha+\gamma)=\frac{1-i}{2}(\gamma+\alpha)+\frac{1+i}{2}(\beta+\delta)$$

すると，$i(\alpha+\gamma)=i(\beta+\delta)$ となり，$\alpha+\gamma=\beta+\delta$ から $\alpha-\beta=\delta-\gamma$ なので，

$$\mathrm{BA}=\mathrm{CD},\ \ \mathrm{BA}\ /\!/\ \mathrm{CD}$$

これより，四角形 ABCD は平行四辺形である。

［コメント］

複素数と図形についての有名問題です。非常に長い問題文に惑わされそうですが。

5

問題のページへ

(1)　与えられた関数 $f(x)$ について，$f''(x)$ は $f''(x)>0$ で，$f'''(x)<0$ から単調に減少する。これより，$f'(x)$ は単調に増加し，$f'(0)=0$ なので，

$$f'(x)>f'(0)=0\quad(x>0)$$

すると，$f(x)$ は $x>0$ において単調に増加する。このとき，

$$F=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)dx\quad(0<a<b)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$0<a<t$ として，$g(t)=\dfrac{f(t)+f(a)}{2}(t-a)-\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ とおくと，

$$g'(t)=\frac{f'(t)}{2}(t-a)+\frac{f(t)+f(a)}{2}-f(t)=\frac{t-a}{2}f'(t)-\frac{f(t)-f(a)}{2}\cdots\cdots②$$

$a<c<t$ を満たす c をとると，平均値の定理から，

$$f(t)-f(a)=f'(c)(t-a)$$

そして，$f'(x)$ は単調に増加するので，

$$g'(t)=\frac{t-a}{2}f'(t)-\frac{t-a}{2}f'(c)=\frac{t-a}{2}\{f'(t)-f'(c)\}>0$$

すると，$g(t)>\displaystyle\lim_{t\to a+0}g(t)=g(a)=0$ となり，①から，$F=g(b)>0$ である。

(2)　$0<a<t$ として，$h(t)=\dfrac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\dfrac{a+t}{2}\right)+f(t)\right\}(t-a)\cdots\cdots③$とおくと，

$$h'(t)=\frac{1}{2}\left\{-2f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+f'(t)\right\}(t-a)+\frac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\frac{a+t}{2}\right)+f(t)\right\}$$

$$=-\frac{t-a}{2}f'\left(\frac{a+t}{2}\right)+\frac{t-a}{2}f'(t)+\frac{1}{2}f(a)-f\left(\frac{a+t}{2}\right)+\frac{1}{2}f(t)\cdots\cdots\cdots④$$

さて，$p(t)=h(t)-g(t)$ とおくと，$p'(t)=h'(t)-g'(t)$ となり，②④より，

$$p'(t)=-\frac{t-a}{2}f'\left(\frac{a+t}{2}\right)-f\left(\frac{a+t}{2}\right)+f(t)$$

$\dfrac{a+t}{2}<d<t$ を満たす d をとると，平均値の定理から，

$$f(t)-f\left(\frac{a+t}{2}\right)=f'(d)\left(t-\frac{a+t}{2}\right)$$

そして，$f'(x)$ は単調に増加するので，

$$p'(t)=-\frac{t-a}{2}f'\left(\frac{a+t}{2}\right)+\frac{t-a}{2}f'(d)=\frac{t-a}{2}\left\{f'(d)-f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\}>0$$

すると，$p(t)>\displaystyle\lim_{t\to a+0}p(t)=p(a)=0$ となり，$g(t)<h(t)$ である。$t=b$ とおくと $g(b)<h(b)$ となるので，①③から，

$$F<\frac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}(b-a)\cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　$0<a<b$ において，$G=\dfrac{b-a}{2}f'(b)-\left\{f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}$ とおくと，

$$G=\frac{b-a}{2}f'(b)-\left\{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right\}\cdots\cdots\cdots⑥$$

$0<a<e_1<\dfrac{a+b}{2}<e_2<b$ を満たす e_1，e_2 をとると，平均値の定理から，

$$f(b)-f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)=f'(e_2)\Big(b-\frac{a+b}{2}\Big)=\frac{b-a}{2}f'(e_2)$$

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-f(a)=f'(e_1)\Big(\frac{a+b}{2}-a\Big)=\frac{b-a}{2}f'(e_1)$$

⑥から，$G=\dfrac{b-a}{2}\{f'(b)-f'(e_2)+f'(e_1)\}$………⑦

そして，$f'(x)$ は単調に増加するので $f'(b)-f'(e_2)>0$ が成り立ち，$x>0$ において $f'(x)>0$ から $f'(e_1)>0$ である。すると，⑦から $G>0$ となるので，

$$f(a)-2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)<\frac{b-a}{2}f'(b)$$

(4)　(3)から，$f(a)-2f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)+f(b)=\dfrac{b-a}{2}\{f'(e_2)-f'(e_1)\}$ となり，⑤から，

$$F<\frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{2}\{f'(e_2)-f'(e_1)\}(b-a)=\frac{(b-a)^2}{4}\{f'(e_2)-f'(e_1)\}$$

$0<a<e_1<e_3<e_2<b$ を満たす e_3 をとると，平均値の定理から，

$$f'(e_2)-f'(e_1)=(e_2-e_1)f''(e_3)$$

$f''(e_3)>0$ で，$f''(x)$ は単調に減少するので，

$$(e_2-e_1)f''(e_3)<(b-a)f''(e_3)<(b-a)f''(a)$$

以上より，$F<\dfrac{(b-a)^2}{4}\cdot(b-a)f''(a)=\dfrac{(b-a)^3}{4}f''(a)$ となる。

［コメント］

抽象関数を題材にした平均値の定理についてのかなり難しめの論証問題です。特に，(2)と(3)の結果が(4)にストレートに結びつかず，試行錯誤が要求されます。なお，$f(x)$ は多くの条件が設定されているので，それを冒頭にまとめておきました。