

1

[解答例のページへ](#)

数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定める。この

とき, 以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $a_n > 3$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} < a_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) 2 以上のすべての自然数 n に対して $a_n - 3 < 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

2[解答例のページへ](#)

さいころを投げて座標平面上の点 P を動かす試行を繰り返す。最初の点 P の位置は原点であるとする。1 回の試行では 1 個のさいころを投げて、出た目に応じて以下の規則により点 P を動かす。

- ・ 1 または 2 が出れば、点 P を x 軸方向に $+1$ だけ動かす。
- ・ 3 または 4 が出れば、点 P を y 軸方向に $+1$ だけ動かす。
- ・ 5 または 6 が出れば、点 P を y 軸方向に -1 だけ動かす。

n 回目の試行直後の点 P の座標を (x_n, y_n) とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $y_1, \dots, y_5$ がすべて 0 以上で、かつ $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。

3[解答例のページへ](#)

座標平面上に、曲線 $D: y = \log x$ ($x > 0$) とその上の点 $A(a, \log a)$ がある。半径 r の円 C は y 軸に接し、かつ、円 C は曲線 D と点 A で同一の接線をもつ。さらに、 $r < a$ が成り立つとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) r を a を用いて表せ。
- (2) $r > \frac{a}{2}$ となることを示せ。
- (3) $a = \sqrt{3}$ のとき、 x 軸、 y 軸、円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積を求めよ。

4[解答例のページへ](#)

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x) = \frac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}}$ について、以下の

問いに答えよ。

- (1) $f'(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。
- (2) $f''(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。
- (3) $y = f(x)$ の凹凸，変曲点，ならびに漸近線を調べて，そのグラフの概形を描け。
- (4) 点 $(0, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に接線が引けるような実数 t の範囲を求めよ。

5

解答例のページへ

正方形に対して、その 2 本の対角線の交点を、その正方形の中心と呼ぶ。また、すべての内角が 180° 未満の四角形を凸四角形と呼ぶ。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上に正方形 PQRS があり、その中心 T から見て 4 点 P, Q, R, S は反時計回りに並んでいる。頂点 P, Q の座標を表す複素数を p, q とするとき、中心 T の座標を表す複素数 t を p, q を用いて表せ。
- (2) 複素数平面上に凸四角形 ABCD がある。頂点 A, B, C, D の座標を表す複素数はそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。四角形 ABCD の外側に線分 AB を 1 辺とする正方形を描きその中心を X とする。同様に、ABCD の外側に線分 BC を 1 辺とする正方形を描きその中心を Y とし、ABCD の外側に線分 CD を 1 辺とする正方形を描きその中心を Z とし、ABCD の外側に線分 DA を 1 辺とする正方形を描きその中心を W とする。このとき、 $XZ = YW$ であり、かつ、直線 XZ と直線 YW が直交することを証明せよ。
- (3) (2)において、線分 XZ と線分 YW がそれらの中点で交わる時、四角形 ABCD はどのような四角形になるか。理由とともに述べよ。

1

問題のページへ

数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 10$ 、 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる。

(1) すべての自然数 n に対して、 $a_n > 3$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき $a_1 = 10 > 3$ より成り立っている。

(ii) $n = k$ のとき $a_k > 3$ が成り立つと仮定すると、

$$a_{k+1} - 3 = \frac{2}{3}a_k + \frac{9}{a_k^2} - 3 = \frac{2a_k^3 - 9a_k^2 + 27}{3a_k^2} = \frac{(a_k - 3)^2(2a_k + 3)}{3a_k^2} > 0$$

これより、 $a_{k+1} > 3$ となり、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i)(ii) より、すべての自然数 n に対して、 $a_n > 3$ が成り立つ。

(2) $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2} - a_n = -\frac{1}{3}a_n + \frac{9}{a_n^2} = -\frac{a_n^3 - 27}{3a_n^2}$ となり、(1) から、

$$-\frac{a_n^3 - 27}{3a_n^2} < 0, \quad a_{n+1} - a_n < 0$$

したがって、すべての自然数 n に対して、 $a_{n+1} < a_n$ が成り立つ。

(3) (1) から、 $a_{n+1} - 3 = \frac{(a_n - 3)^2(2a_n + 3)}{3a_n^2} = \frac{(a_n - 3)(2a_n + 3)}{3a_n^2}(a_n - 3) \cdots \cdots (*)$

ここで、 $a_n > 3$ から、 $\frac{(a_n - 3)(2a_n + 3)}{3a_n^2} > 0$ となり、

$$\frac{2}{3} - \frac{(a_n - 3)(2a_n + 3)}{3a_n^2} = \frac{2a_n^2 - (2a_n^2 - 3a_n - 9)}{3a_n^2} = \frac{3(a_n + 3)}{3a_n^2} > 0$$

すると、 $0 < \frac{(a_n - 3)(2a_n + 3)}{3a_n^2} < \frac{2}{3}$ となり、(*) から $a_{n+1} - 3 < \frac{2}{3}(a_n - 3)$

したがって、 $n \geq 2$ において、 $a_n - 3 < (a_1 - 3)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ が成り立つ。

[コメント]

漸化式と数学的帰納法を組み合わせた頻出タイプの問題です。

2

問題のページへ

最初、原点にある点 P を動かす試行について、 x 軸方向に $+1$ は「 $\rightarrow$ 」、 y 軸方向に $+1$ は「 $\uparrow$ 」、 y 軸方向に -1 は「 $\downarrow$ 」と記し、 n 回目の試行直後には $P(x_n, y_n)$ にあるとする。
 なお、この 3 つの事象の確率は、いずれも $\frac{1}{3}$ である。

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となるのは、「 $\rightarrow$ 」が 0 回、「 $\uparrow$ 」が 3 回、「 $\downarrow$ 」が 3 回より、その確率は、

$$\frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{20}{729}$$

- (2) $y_6 = 0$ となるのは、「 $\uparrow$ 」と「 $\downarrow$ 」が同じ回数であることに注意すると、

(i) 「 $\rightarrow$ 」が 0 回、「 $\uparrow$ 」が 3 回、「 $\downarrow$ 」が 3 回のとき 確率は、(1) より $\frac{20}{729}$

(ii) 「 $\rightarrow$ 」が 2 回、「 $\uparrow$ 」が 2 回、「 $\downarrow$ 」が 2 回のとき 確率は、 $\frac{6!}{2!2!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{90}{729}$

(iii) 「 $\rightarrow$ 」が 4 回、「 $\uparrow$ 」が 1 回、「 $\downarrow$ 」が 1 回のとき 確率は、 $\frac{6!}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{30}{729}$

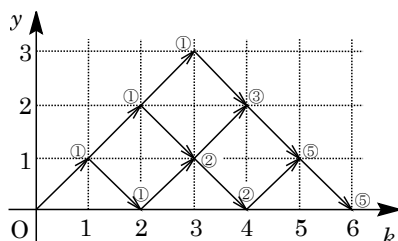
(iv) 「 $\rightarrow$ 」が 6 回、「 $\uparrow$ 」が 0 回、「 $\downarrow$ 」が 0 回のとき 確率は、 $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

(i)～(iv) より、 $y_6 = 0$ となる確率は、 $\frac{20}{729} + \frac{90}{729} + \frac{30}{729} + \frac{1}{729} = \frac{47}{243}$ である。

- (3) $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0$ かつ

$y_6 = 0$ となると、試行の回数 k と点 P の y 座標の関係をもとめると、右図のようになる。

なお、丸数字は条件に適する「 $\uparrow$ 」と「 $\downarrow$ 」の経路数を表す。



- (i) 「 $\rightarrow$ 」が 0 回、「 $\uparrow$ 」が 3 回、「 $\downarrow$ 」が 3 回のとき

「 $\uparrow$ 」と「 $\downarrow$ 」について 5 通りの場合があり、確率は $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{5}{729}$ となる。

- (ii) 「 $\rightarrow$ 」が 2 回、「 $\uparrow$ 」が 2 回、「 $\downarrow$ 」が 2 回のとき

「 $\uparrow$ 」と「 $\downarrow$ 」について 2 通りの場合があり、確率は ${}_6C_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{30}{729}$ となる。

- (iii) 「 $\rightarrow$ 」が 4 回、「 $\uparrow$ 」が 1 回、「 $\downarrow$ 」が 1 回のとき

「 $\uparrow$ 」と「 $\downarrow$ 」について 1 通りの場合があり、確率は ${}_6C_4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{15}{729}$ となる。

- (iv) 「 $\rightarrow$ 」が 6 回、「 $\uparrow$ 」が 0 回、「 $\downarrow$ 」が 0 回のとき 確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$ となる。

(i)～(iv) より、求める確率は、 $\frac{5}{729} + \frac{30}{729} + \frac{15}{729} + \frac{1}{729} = \frac{17}{243}$ である。

[コメント]

ランダムウォークを題材にした確率問題です。(3)は与えられた条件がきついのので、グラフを用いて場合の数を数えています。なお、2010年に類題が出ています。

3

問題のページへ

- (1) 曲線 $D: y = \log x \cdots \cdots ①$ 上の点 $A(a, \log a)$ に対し、 y 軸に接する半径 r の円 C の中心を $B(r, b)$ とおくと、

$$\overrightarrow{BA} = (a-r, \log a - b)$$

ここで、 C と D は点 A で接するので、 $|\overrightarrow{BA}| = r$ から、

$$(a-r)^2 + (\log a - b)^2 = r^2 \cdots \cdots ②$$

また、①から $y' = \frac{1}{x}$ となり、点 A における接線の方

ベクトル $\vec{u}$ は、 $\vec{u} = (1, \frac{1}{a}) = \frac{1}{a}(a, 1)$ と表せるので、 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ から、

$$a(a-r) + (\log a - b) = 0 \cdots \cdots ③$$

②③から、 $(a-r)^2 + a^2(a-r)^2 = r^2$ となり、 $(1+a^2)(a-r)^2 = r^2$

さらに、 $r < a$ から $\sqrt{1+a^2}(a-r) = r$ なので、 $(\sqrt{1+a^2}+1)r = a\sqrt{1+a^2}$ より、

$$r = \frac{a\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}+1} = \frac{a\sqrt{1+a^2}(\sqrt{1+a^2}-1)}{(1+a^2)-1} = \frac{1+a^2-\sqrt{1+a^2}}{a} \cdots \cdots ④$$

$$\begin{aligned} (2) \quad r - \frac{a}{2} &= \frac{1+a^2-\sqrt{1+a^2}}{a} - \frac{a}{2} = \frac{2+a^2-2\sqrt{1+a^2}}{2a} = \frac{(2+a^2)^2-4(1+a^2)}{2a(2+a^2+2\sqrt{1+a^2})} \\ &= \frac{a^4}{2a(2+a^2+2\sqrt{1+a^2})} > 0 \end{aligned}$$

これより、 $r > \frac{a}{2}$ となる。

$$(3) \quad a = \sqrt{3} \text{ のとき、④から } r = \frac{1+3-\sqrt{1+3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ となり、③から、}$$

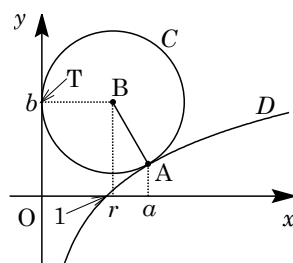
$$b = \sqrt{3} \left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \log \sqrt{3} = 1 + \log \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BA} = \left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}, \log \sqrt{3} - 1 - \log \sqrt{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{BT} = r(-1, 0) \text{ から、}$$

$$\cos \angle ABT = \frac{-1}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}, \quad \angle ABT = \frac{2}{3}\pi$$

これより、 x 軸、 y 軸、円 C の下半分と曲線 D によって囲まれる領域の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= ab - \frac{1}{2}(a-r)(b - \log a) - \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \int_1^a \log x \, dx \\ &= ab - \frac{1}{2}(a-r) \cdot a(a-r) - \frac{1}{3}\pi r^2 - [x \log x - x]_1^a \\ &= \sqrt{3}(1 + \log \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{4}{3} - \sqrt{3} \log \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{9}\pi - 1 = \frac{11}{6}\sqrt{3} - \frac{4}{9}\pi - 1 \end{aligned}$$



[コメント]

曲線と円が接するときの面積計算の問題です。方針に迷うことはないでしょうが、計算は見かけより面倒です。

4

問題のページへ

$$(1) \quad f(x) = \frac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}} = (16-x^2)(x^4-2x^2+16)^{-\frac{1}{2}} \text{ に対して,}$$

$$f'(x) = -2x(x^4-2x^2+16)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(16-x^2)(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}(4x^3-4x)$$

$$= -2x(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}\{(x^4-2x^2+16) + (16-x^2)(x^2-1)\}$$

$$= -2x(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}} \cdot 15x^2 = -30x^3(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}}$$

これより、 $f'(x)=0$ を満たす x は、 $x=0$ である。

$$(2) \quad f''(x) = -90x^2(x^4-2x^2+16)^{-\frac{3}{2}} + 30x^3 \cdot \frac{3}{2}(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}(4x^3-4x)$$

$$= -90x^2(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}\{(x^4-2x^2+16) - x(2x^3-2x)\}$$

$$= 90x^2(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}(x^4-16)$$

$$= 90x^2(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^4-2x^2+16)^{-\frac{5}{2}}$$

これより、 $f''(x)=0$ を満たす x は、 $x=0, \pm 2$ である。

$$(3) \quad f(-x) = \frac{16-(-x)^2}{\sqrt{(-x)^4-2(-x)^2+16}} = f(x) \text{ より, } y=f(x) \text{ のグラフは } y \text{ 軸対称と}$$

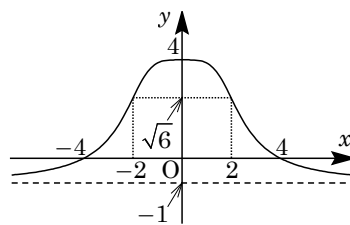
なり、以下、 $x \geq 0$ において増減と凹凸を調べる。

すると、右表のようになり、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{16}{x^2}-1}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{16}{x^4}}} = -1 \end{aligned}$$

x	0	...	2	...
$f'(x)$	0	—		—
$f''(x)$	0	—	0	+
$f(x)$	4	$\searrow$	$\sqrt{6}$	$\searrow$

そこで、 $x \leq 0$ の部分は $x \geq 0$ の部分を y 軸対称すると、 $y=f(x)$ のグラフは、 $-2 < x < 2$ で上に凸、 $x < -2, 2 < x$ で下に凸となり、変曲点の座標は $(-2, \sqrt{6})$ と $(2, \sqrt{6})$ である。漸近線は $y=-1$ であり、グラフの概形は右図の実線のようなになる。



(4) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(u, f(u))$ における接線の方程式は、

$$y-f(u) = f'(u)(x-u), \quad y = f'(u)x + f(u) - uf'(u)$$

点 $(0, t)$ を通ることより、 $t = f(u) - uf'(u) \cdots \cdots (*)$

ここで、 $g(u) = f(u) - uf'(u)$ とおくと、 $(*)$ を満たす実数 t の範囲は、対称性を考えると、 $u \geq 0$ のときの $g(u)$ の範囲が対応し、

$$g'(u) = f'(u) - f'(u) - uf''(u) = -uf''(u)$$

$$= -90u^3(u+2)(u-2)(u^2+4)(u^4-2u^2+16)^{-\frac{5}{2}}$$

すると、 $u \geq 0$ における $g(u)$ の増減は右表のようになり、 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = -1$ で、

u	0	...	2	...
$g'(u)$	0	+	0	-
$g(u)$	4	$\nearrow$	$\frac{8}{3}\sqrt{6}$	$\searrow$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} uf'(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-30u^4}{\sqrt{(u^4 - 2u^2 + 16)^3}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-30}{\sqrt{\frac{(u^4 - 2u^2 + 16)^3}{u^8}}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-30}{\sqrt{u^4 \left(1 - \frac{2}{u^2} + \frac{16}{u^4}\right)^3}} = 0$$

すると、 $\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \{f(u) - uf'(u)\} = -1 - 0 = -1$ から、 $-1 < g(u) \leq \frac{8}{3}\sqrt{6}$

となり、(*)から実数 t の範囲は $-1 < t \leq \frac{8}{3}\sqrt{6}$ である。

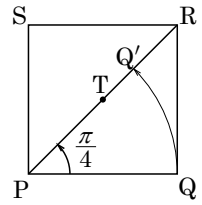
[コメント]

微分と増減についての問題ですが、計算は半端な量ではありません。そのためずいぶん時間を費やし、疲労も蓄積します。

5

問題のページへ

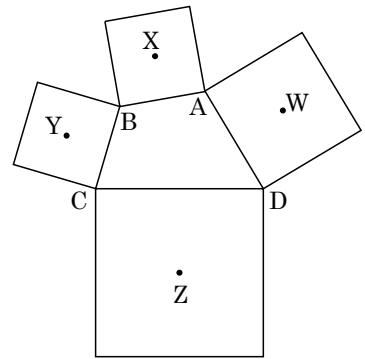
- (1) 複素数平面上で反時計回りに並んでいる 4 点 P, Q, R, S が頂点である正方形 $PQRS$ の中心を T とする。このとき、 $\angle QPT = \frac{\pi}{4}$ 、 $PT = \frac{\sqrt{2}}{2}PQ$ から、中心 $T(t)$ は、点 $Q(q)$ を点 $P(p)$ のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、その距離を $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点より、



$$t - p = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (q - p) = \frac{1+i}{2} (q - p)$$

すると、 $t = p + \frac{1+i}{2}(q - p) = \frac{1-i}{2}p + \frac{1+i}{2}q$ となる。

- (2) 反時計回りに並んでいる 4 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ が頂点である凸四角形 $ABCD$ について、右図のように、四角形 $ABCD$ の外側に 4 つの正方形を描き、その中心を $X(x), Y(y), Z(z), W(w)$ とおく。



ここで、(1)の結果を利用すると、

$$x = \frac{1-i}{2}\beta + \frac{1+i}{2}\alpha, \quad y = \frac{1-i}{2}\gamma + \frac{1+i}{2}\beta$$

$$z = \frac{1-i}{2}\delta + \frac{1+i}{2}\gamma, \quad w = \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{1+i}{2}\delta$$

$$\text{すると、} z - x = \frac{1-i}{2}(\delta - \beta) + \frac{1+i}{2}(\gamma - \alpha), \quad w - y = \frac{1-i}{2}(\alpha - \gamma) + \frac{1+i}{2}(\delta - \beta)$$

$$i(z - x) = \frac{i+1}{2}(\delta - \beta) + \frac{i-1}{2}(\gamma - \alpha) = \frac{1-i}{2}(\alpha - \gamma) + \frac{1+i}{2}(\delta - \beta) = w - y$$

したがって、 $\frac{w-y}{z-x} = i$ から、 $\frac{|w-y|}{|z-x|} = 1$ かつ $\arg \frac{w-y}{z-x} = \frac{\pi}{2}$ となり、 $XZ = YW$

かつ直線 XZ と直線 YW は直交する。

なお、4 点 A, B, C, D が時計回りに並んでいるときは、 i を $-i$ に置き換えれば同様に示すことができる。

- (3) 線分 XZ と線分 YW が中点で交わる時、 $\frac{x+z}{2} = \frac{y+w}{2}$ から、

$$\frac{1-i}{2}(\beta + \delta) + \frac{1+i}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{1-i}{2}(\gamma + \alpha) + \frac{1+i}{2}(\beta + \delta)$$

すると、 $i(\alpha + \gamma) = i(\beta + \delta)$ となり、 $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ から $\alpha - \beta = \delta - \gamma$ なので、

$$BA = CD, \quad BA \parallel CD$$

これより、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

[コメント]

複素数と図形についての有名問題です。非常に長い問題文に惑わされそうですが。