1　解答解説のページへ

与えられた実数 $a,\ b$ のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面において, 2 点 P, Q をそれぞれ直線 $x=-1$, $x=2$ 上の点とし, 直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき, 2 点 P, Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

空間に，同一直線上にない 3 点 O，A，B と 1 点 P がある。O，A，B を通る平面を α とし，点 P は α 上にないとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とおき，$|\vec{a}| = \sqrt{2}$，$|\vec{b}| = \sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = -1$，$\vec{p}\cdot\vec{a} = 2$，$\vec{p}\cdot\vec{b} = -2$ とする。

(1)　$\vec{p} - s\vec{a} - t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s, t を定めよ。

(2)　平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ を用いて表せ。

(3)　三角形 OPQ の面積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

複素数平面において，原点を中心とする半径 1 の円の円周を C，内部を D，外部を E とする(D, E は円周 C を含まない)。また，$1+a\overline{b}\neq 0$ となる複素数 a, b に対し，$z=\dfrac{a+b}{1+a\overline{b}}$ とおく。

(1)　a, b がともに D 内にあるとき，$1+a\overline{b}\neq 0$ であることを示せ。また, a, b がともに E 内にあるときも，$1+a\overline{b}\neq 0$ であることを示せ。

(2)　a, b がともに D 内にあるとき, z も D 内にあることを示せ。また, a, b がともに E 内にあるときも, z は D 内にあることを示せ。

(3)　$1+a\overline{b}\neq 0$ となる複素数 a, b に対し, a または b が C 上にあることは, z が C 上にあるための必要十分条件であることを示せ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3-7x$，$f'(x)=3x^2-7=3\left(x-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$

$y=f(x+1)$のグラフは$y=f(x)$のグラフを x 軸方向に-1だけ平行移動したもので，$y=f(x-1)$のグラフは$y=f(x)$のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

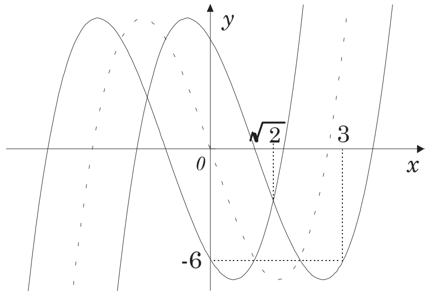
ここで，$f(x+1)=f(x-1)$とすると，$(x+1)^3-7(x+1)=(x-1)^3-7(x-1)$

$x^2-2=0$，$x=\sqrt{2}$ $(x\geqq 0)$

したがって，

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$のとき，$g(x)=f(x+1)$

$\sqrt{2}\leqq x\leqq 3$のとき，$g(x)=f(x-1)$



また，$0<\dfrac{\sqrt{21}}{3}-1<\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{21}}{3}+1<3$より，$0\leqq x\leqq 3$における$y=g(x)$が最小となる$x$は，$x=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\pm 1$となる。

最大となるxは，$x=0$，$\sqrt{2}$，3 のいずれかである。

ここで，$g(0)=f(1)=-6$，$g(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7)=-2\sqrt{2}$，$g(3)=f(2)=-6$となることより，最大となる$x$は，$x=\sqrt{2}$である。

(2) $f(x)=f(x+1)$とすると，$x^3-7x=(x+1)^3-7(x+1)$より，

$3x^2+3x-6=0$，$x=1$ $(x\geqq 0)$

また，$f(x)=f(x-1)$とすると，$x^3-7x=(x-1)^3-7(x-1)$より，

$-3x^2+3x+6=0$，$x=2$ $(x\geqq 0)$

$y=f(x)$と$y=g(x)$で囲まれた部分は，$1\leqq x\leqq 2$の範囲だけなので，

$$S_1=\int_1^{\sqrt{2}}\left\{f(x+1)-f(x)\right\}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(3x^2+3x-6)\,dx=-4\sqrt{2}+\frac{13}{2}$$

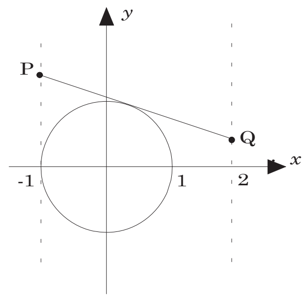
$$S_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left\{f(x-1)-f(x)\right\}dx=\int_{\sqrt{2}}^{2}(-3x^2+3x+6)\,dx=-4\sqrt{2}+7$$

求める面積は，$S_1+S_2=-8\sqrt{2}+\dfrac{27}{2}$

［解 説］

$y=f(x)$のグラフを丁寧に書いて，x 軸方向に$+1$，および-1だけ平行移動すれば，結論は見えてきます。後はそれを計算で補うだけです。

$\boxed{2}$ 問題のページへ



$\mathrm{P}(-1,\ a)$，$\mathrm{Q}(2,\ b)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(3,\ b-a)$ から，直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$ とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するので,

$\dfrac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1$ から，$|-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$

両辺 2 乗して，$(2a+b)^2=(a-b)^2+9$，$(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

a, b は整数より, a は 3 の約数となり，$a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$ のとき $a+2b=3$ から，$b=1$ となる。よって，$\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(2,\ 1)$

$a=-1$ のとき $a+2b=-3$ から，$b=-1$ となる。よって，$\mathrm{P}(-1,\ -1)$，$\mathrm{Q}(2,\ -1)$

$a=3$ のとき $a+2b=1$ から，$b=-1$ となる。よって，$\mathrm{P}(-1,\ 3)$，$\mathrm{Q}(2,\ -1)$

$a=-3$ のとき $a+2b=-1$ から，$b=1$ となる。よって，$\mathrm{P}(-1,\ -3)$，$\mathrm{Q}(2,\ 1)$

［解 説］

円と直線が接する条件を整理すると，約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$(\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ から

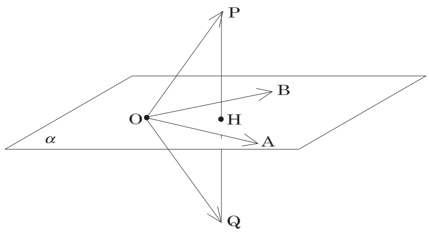
$$\vec{p}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$2-2s+t=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$(\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ から

$$\vec{p}\cdot\vec{b}-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$$

$$-2+s-2t=0\cdots\cdots\cdots②$$



①②より，$s=\dfrac{2}{3}$，$t=-\dfrac{2}{3}$

(2)　(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ とおくと，点 H は平面 α 上の点であり，しかも，$\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ が α に垂直なので，点 H は点 P から α に下ろした垂線の足となる。

すると, 2 点 P, Q の中点が H より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-\vec{p}$$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left|\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\dfrac{4}{9}\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\dfrac{4}{9}(2+2+2)=\dfrac{8}{3}$

ここで，$\triangle\mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

また，$\triangle\mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OH}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{8}{3}}\cdot\mathrm{PH}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\mathrm{PH}$

よって，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ から，$\mathrm{PH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

三平方の定理から，$|\vec{p}|=\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2}=\sqrt{\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$

［解 説］

P から α に下ろした垂線の足を表す位置ベクトルを求めることが(1)の意味です。これに気づくことが，(2)の解法のポイントです。また，(3)ではベクトルだけの計算で OP を求めてもよいのですが，上の解では直角に注目して図形的に考えてみました。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　a, b がともに D 内にあるとき，$|a|<1$，$|b|<1$

$|a|\cdot|b|<1$，$|ab|<1$ から，$ab\overline{a}\overline{b}<1$

ここで，$a\overline{b}=w$ とおくと，$w\overline{w}<1$

よって，$|w|<1$ から $w\neq -1$，すなわち $1+a\overline{b}\neq 0$

また, a, b がともに E 内にあるとき，$|a|>1$，$|b|>1$

$|a|\cdot|b|>1$，$|ab|>1$ から，$ab\overline{a}\overline{b}>1$，つまり $w\overline{w}>1$

よって，$|w|>1$ から $w\neq -1$，すなわち $1+a\overline{b}\neq 0$

(2)　$1+a\overline{b}\neq 0$ のもとで,

$$|z|<1 \iff |a+b|<|1+a\overline{b}| \iff (a+b)(\overline{a}+\overline{b})<(1+a\overline{b})(1+\overline{a}b)$$
$$\iff a\overline{a}b\overline{b}-a\overline{a}-b\overline{b}+1>0 \iff (a\overline{a}-1)(b\overline{b}-1)>0$$
$$\iff \left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)>0$$

a, b がともに D 内にあるとき, (1)から $1+a\overline{b}\neq 0$ で，$|a|<1$，$|b|<1$

よって，$\left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)>0$，すなわち $|z|<1$ から z は D 内にある。

a, b がともに E 内にあるとき, (1)から $1+a\overline{b}\neq 0$ で，$|a|>1$，$|b|>1$

よって，$\left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)>0$，すなわち $|z|<1$ から z は D 内にある。

(3)　$1+a\overline{b}\neq 0$ のもとで, (2)と同様にして,

$$|z|=1 \iff \left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)=0 \iff |a|=1 \text{ または } |b|=1$$

よって，a または b が C 上にあることは，z が C 上にあるための必要十分条件である。

［解 説］

証明問題が 3 題並んでいて，難しそうな雰囲気が漂っていますが，見かけほどではありません。なお，(2)では結論を同値変形して方針を立てました。また，(3)は(2)との関連を考えて対偶でも使うのではないかと一瞬構えたのですが，直接的な証明が容易にできました。