$\boxed{1}$

解答解説のページへ

与えられた実数 a, b のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面において, 2 点 P, Q をそれぞれ直線 $x=-1$, $x=2$ 上の点とし, 直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき, 2 点 P, Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。

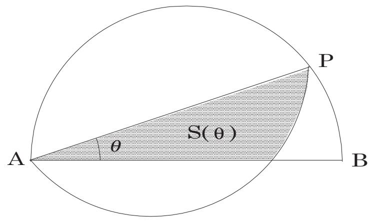
3

解答解説のページへ

AB を直径とする半径 1 の半円がある。P を半円周上の動点とし，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおくとき，P は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす範囲を動く。直径 AB と弦 AP と弧 PB で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す。

(1)　$T(\theta)$ を求めよ。

(2)　P が半円周上を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，右図のように，線分 AP を折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく。このとき，$S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ。



(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える θ の値を α とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上の三角形 OAB は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ をみたすとする。辺 AB を 1 ： 2 に内分する点を P とし，直線 OP に関して A と対称な点を Q, OQ の延長と AB の交点を R とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(3)　△PQR の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

複素数 z に対して複素数 w を $w=\dfrac{2iz}{z-\alpha}$ で定める。ただし，α は 0 でない複素数の定数とする。

(1)　点 z が α 以外のすべての複素数を動くとき，点 w のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　点 z がある円周 C 上を動くとき，点 w は原点 O を中心とする半径 1 の円周を描くものとする。このとき，円周 C の中心と半径を α を用いて表せ。また円周 C の中心が i のとき，α の値を求めよ。

(3)　α は(2)で求めた値とする。点 z が実軸上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-7x$，$f'(x)=3x^2-7=3\left(x-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$y=f(x+1)$のグラフは$y=f(x)$のグラフを x 軸方向に-1だけ平行移動したもので，$y=f(x-1)$のグラフは$y=f(x)$のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

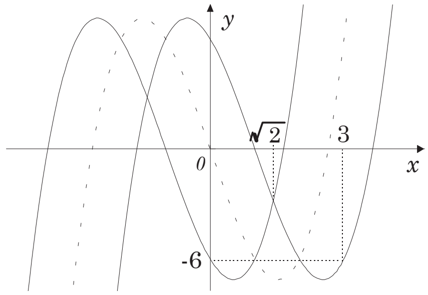
ここで，$f(x+1)=f(x-1)$とすると，$(x+1)^3-7(x+1)=(x-1)^3-7(x-1)$

$x^2-2=0$，$x=\sqrt{2}$ $(x\geqq 0)$

したがって，

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$のとき，$g(x)=f(x+1)$

$\sqrt{2}\leqq x\leqq 3$のとき，$g(x)=f(x-1)$



また，$0<\dfrac{\sqrt{21}}{3}-1<\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{21}}{3}+1<3$より，$0\leqq x\leqq 3$における$y=g(x)$が最小となる$x$は，$x=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\pm 1$となる。

最大となるxは，$x=0$，$\sqrt{2}$，3のいずれかである。

ここで，$g(0)=f(1)=-6$，$g(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7)=-2\sqrt{2}$，$g(3)=f(2)=-6$となることより，最大となる$x$は，$x=\sqrt{2}$である。

(2)　$f(x)=f(x+1)$とすると，$x^3-7x=(x+1)^3-7(x+1)$より，

$3x^2+3x-6=0$，$x=1$ $(x\geqq 0)$

また，$f(x)=f(x-1)$とすると，$x^3-7x=(x-1)^3-7(x-1)$より，

$-3x^2+3x+6=0$，$x=2$ $(x\geqq 0)$

$y=f(x)$と$y=g(x)$で囲まれた部分は，$1\leqq x\leqq 2$の範囲だけなので，

$$S_1=\int_1^{\sqrt{2}}\left\{f(x+1)-f(x)\right\}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(3x^2+3x-6)\,dx=-4\sqrt{2}+\frac{13}{2}$$

$$S_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left\{f(x-1)-f(x)\right\}dx=\int_{\sqrt{2}}^{2}(-3x^2+3x+6)\,dx=-4\sqrt{2}+7$$

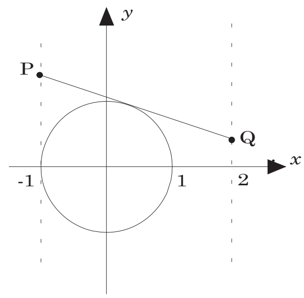
求める面積は，$S_1+S_2=-8\sqrt{2}+\dfrac{27}{2}$

［解 説］

$y=f(x)$のグラフを丁寧に書いて，x 軸方向に$+1$，および-1だけ平行移動すれば，結論は見えてきます。後はそれを計算で補うだけです。

$\boxed{2}$

問題のページへ



$P(-1,\ a)$，$Q(2,\ b)$ とする。

$\overrightarrow{PQ}=(3,\ b-a)$ から，直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$ とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するので,

$\dfrac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1$ から，$|-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$

両辺 2 乗して，$(2a+b)^2=(a-b)^2+9$，$(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

a, b は整数より, a は 3 の約数となり，$a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$ のとき $a+2b=3$ から，$b=1$ となる。よって，$P(-1,\ 1)$，$Q(2,\ 1)$

$a=-1$ のとき $a+2b=-3$ から，$b=-1$ となる。よって，$P(-1,\ -1)$，$Q(2,\ -1)$

$a=3$ のとき $a+2b=1$ から，$b=-1$ となる。よって，$P(-1,\ 3)$，$Q(2,\ -1)$

$a=-3$ のとき $a+2b=-1$ から，$b=1$ となる。よって，$P(-1,\ -3)$，$Q(2,\ 1)$

［解 説］

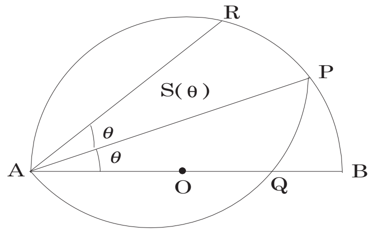
円と直線が接する条件を整理すると，約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　円の中心を O とすると，$\angle\mathrm{POB}=2\theta$ より，

$$T(\theta)=\triangle\mathrm{OAP}+(\text{扇形 BOP})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin2\theta+\theta$$



(2)　折り重ねた弓形と直径 AB との交点を Q とおき, Q の AP に関する対称点を R とする。

すると, 図形 APQ は図形 APR と合同なので,

$$S(\theta)=(\text{図形 ARP})=(\text{図形 ARB})-(\text{図形 APB})=T(2\theta)-T(\theta)$$

(3)　(2)より，$S(\theta)=\left(\dfrac{1}{2}\sin4\theta+2\theta\right)-\left(\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\theta\right)=\dfrac{1}{2}(\sin4\theta-\sin2\theta)+\theta$

$$S'(\theta)=2\cos4\theta-\cos2\theta+1=4\cos^22\theta-\cos2\theta-1$$
$$=4\left(\cos2\theta-\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(\cos2\theta-\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos2\theta>0$，よって $\cos2\theta-\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}>0$

$\cos2\theta_0=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ とおくと,

$0<\theta<\theta_0$ で $\cos2\theta-\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}>0$

$\theta_0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ で $\cos2\theta-\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}<0$

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		＋	0	－	
$S(\theta)$		↗		↘	

よって，$\theta=\theta_0$ で $S(\theta)$ は最大となる。

すなわち，$\cos2\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

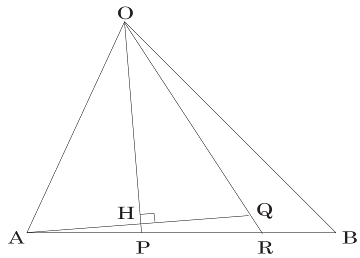
［解　説］

(2)で「$T(\theta)$ だけでなく $T(2\theta)$ も用いよ」という意味の設問にはとまどってしまいますが, これが逆に, 折り返しを考えるヒントとなっています。この点を発見するのが本問のポイントです。

4

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ で, AQ と OP の交点を H とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{a}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルとなるので,



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\vec{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\right)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{1}{9}|2\vec{a}+\vec{b}|^2$

$$=\frac{1}{9}\left(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\frac{8}{9}$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\left(2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{5}{6}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{15}{16}\cdot\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{5}{16}(2\vec{a}+\vec{b})$

H は AQ の中点より，$\dfrac{\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\vec{a}=\frac{5}{8}(2\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$$

(2)　R は OQ 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{4}k\vec{a}+\dfrac{5}{8}k\vec{b}$

R は AB 上の点なので，$\dfrac{1}{4}k+\dfrac{5}{8}k=1$，$k=\dfrac{8}{7}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8}{7}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{8}{7}\vec{b}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{5}{7}\vec{b}$

(3)　(2)より，$\mathrm{AR}:\mathrm{RB}=5:2$，すなわち $\mathrm{AR}=\dfrac{5}{7}\mathrm{AB}$

条件より，$\mathrm{AP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ から，$\mathrm{PR}=\dfrac{5}{7}\mathrm{AB}-\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}=\dfrac{8}{21}\mathrm{AB}$

また, (2)で $k=\dfrac{8}{7}$ より，$\mathrm{QR}=\dfrac{1}{8}\mathrm{OR}$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{8}{21}\cdot\dfrac{1}{8}\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{21}\triangle\mathrm{OAB}$

ここで，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

以上より，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{21}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{84}$

［解 説］

よく見かける頻出題です。(1)では正射影ベクトルを利用しましたが，普通に $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおいて, x, y の連立方程式を立て，それを解いても構いません。

5

問題のページへ

(1)　条件より，$w=\dfrac{2iz}{z-\alpha}=2i+\dfrac{2i\alpha}{z-\alpha}$

　z が $z\neq\alpha$ の任意の値をとるとき，$\alpha\neq 0$ から $\dfrac{2i\alpha}{z-\alpha}$ は 0 以外の任意の値をとりうる。よって, w は $2i$ 以外の任意の値をとりうる。すなわち，$w\neq 2i$ となる。

(2)　$|w|=1$ より，$\left|\dfrac{2iz}{z-\alpha}\right|=1$，$\dfrac{2|z|}{|z-\alpha|}=1$，$\dfrac{|z|}{|z-\alpha|}=\dfrac{1}{2}$

　これより，点 z は原点 O と点 α を 1 : 2 に内分する点 $\dfrac{1}{3}\alpha$ と，1 : 2 に外分する点 $-\alpha$ を直径の両端とする円を描く。

　よって，円 C の中心は $\dfrac{\frac{1}{3}\alpha+(-\alpha)}{2}=-\dfrac{1}{3}\alpha$，半径は $\left|\dfrac{1}{3}\alpha-\left(-\dfrac{1}{3}\alpha\right)\right|=\dfrac{2}{3}|\alpha|$

　また，円 C の中心が i のとき，$-\dfrac{1}{3}\alpha=i$ より $\alpha=-3i$

(3)　(2)より，$w=\dfrac{2iz}{z+3i}$，$wz+3iw=2iz$

　z について解いて，$z=\dfrac{-3iw}{w-2i}$　$(w\neq 2i)$

　z が実数より，$z=\overline{z}$

$$\frac{-3iw}{w-2i}=\frac{3i\overline{w}}{\overline{w}+2i},\quad -w(\overline{w}+2i)=\overline{w}(w-2i),\quad w\overline{w}-i\overline{w}+iw=0$$

$$(w-i)(\overline{w}+i)+i^2=0,\quad (w-i)(\overline{w-i})=1,\quad |w-i|=1$$

　よって，点 w は中心が点 i，半径 1 の円を描く。ただし点 $2i$ は除く。

[解 説]

　複素数平面上の変換を題材とした問題ですが，疑問な点が一つあります。それは(1)の設問で「点 w のとりうる値の範囲」という表現です。これは誤解を招かない妥当な表現なのでしょうか。たぶんこんな意味だろうと判断して，やや雑ですが，上の解を作りました。