1

解答解説のページへ

$a_1=1$，$a_n \neq 0$，$a_n = S_n{}^2 - S_{n-1}{}^2$ ($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。ただし，S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和である。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　S_n を求めよ。

(3)　a_n を求めよ。

2

解答解説のページへ

直線 $y=-x$ と放物線 $y=x^2+2x$ とで囲まれた図形を D とする。

(1) D の面積 S_1 を求めよ。

(2) D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して，不等式 $y \geqq -2x+3$ の表す領域に含まれるように移す。m の最小値 m_1 を求めよ。

(3) m_1 を(2)で求めた最小値とする。D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき, D が通過する範囲を図示し，その面積 S_2 を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上で複素数 0, $1+i$, α, β の表す点をそれぞれ O, P, A, B とする。三角形 OPA は正三角形, 三角形 PAB は直角二等辺三角形で点 B は三角形 OPA の内部にある。

(1) 複素数 α を求めよ。

(2) α の実部が正のとき, 複素数 β を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

三辺の長さが$\mathrm{OA}=2$, $\mathrm{OB}=3$, $\mathrm{AB}=\sqrt{7}$の三角形 OAB がある。OA の中点を M とし, B を始点とする半直線 BM 上に$\mathrm{BP}=t\mathrm{BM}$となる点 P をとり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$とtを用いて表せ。

(2) $\vec{a}$と$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(3) $\mathrm{AP}\perp\mathrm{BM}$となるとき$t$の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　条件より，$a_n = {S_n}^2 - {S_{n-1}}^2 = (S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = a_n(S_n + S_{n-1})$

$a_n \neq 0$ より，$S_n + S_{n-1} = 1 \quad (n \geqq 2)$ ………①

①に $n = 2$ を代入すると，$S_2 + S_1 = 1$，$(a_2 + a_1) + a_1 = 1$

$a_1 = 1$ より，$a_2 = -1$

(2)　①より $S_n = -S_{n-1} + 1$ なので，$S_n - \frac{1}{2} = -\left(S_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$

$$S_n - \frac{1}{2} = \left(S_1 - \frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1} = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

よって，$S_n = \frac{1}{2}\left\{1 + (-1)^{n-1}\right\}$

(3)　$n \geqq 2$ で，$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}\left\{1 + (-1)^{n-1}\right\} - \frac{1}{2}\left\{1 + (-1)^{n-2}\right\}$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{n-1}(1+1) = (-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

$n = 1$ を②にあてはめると，$a_1 = (-1)^0 = 1$ となり成立する。

よって，$a_n = (-1)^{n-1} \quad (n \geqq 1)$

［解 説］

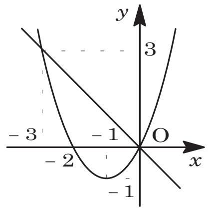
与えられた漸化式を予め変形しておくと, (1)の a_2 の値も簡単に求まります。

2

問題のページへ

(1)　直線 $y=-x$ ……①，放物線 $y=x^2+2x$ ……②

①②の交点は，$-x=x^2+2x$ より，$x=0,\ -3$



$$S_1=\int_{-3}^{0}(-x-x^2-2x)\,dx=-\int_{-3}^{0}x(x+3)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 3^3=\frac{9}{2}$$

(2)　②を x 軸方向に m だけ平行移動すると，

$$y=(x-m)^2+2(x-m)=x^2-(2m-2)x+m^2-2m \text{ ………③}$$

③と $y=-2x+3$ ……④が接するとき，

$$x^2-(2m-2)x+m^2-2m=-2x+3$$

$$x^2-(2m-4)x+m^2-2m-3=0 \text{ ………⑤}$$

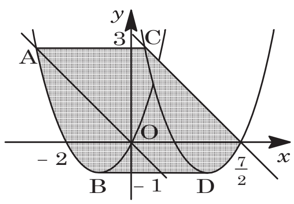
重解条件より $D/4=(m-2)^2-(m^2-2m-3)=0$ なので，$m=\dfrac{7}{2}$ となる。

⑤の重解は $x=m-2=\dfrac{3}{2}$ となり，またこのとき④より $y=0$ なので，③と④の接点は図形 D の境界線上にある。

よって, m の最小値 m_1 は，$m_1=\dfrac{7}{2}$ である。

(3)　図形 D が通過する範囲の面積 S_2 は，D の面積 S_1 に線分 AC，BD と弧 AB，CD によって囲まれた図形の面積を加えたものである。

この図形 ABDC の面積は，平行四辺形 ABDC の面積に等しいので，



$$m_1\times\{3-(-1)\}=\frac{7}{2}\cdot 4=14$$

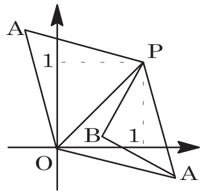
よって，$S_2=S_1+14=\dfrac{37}{2}$

［解　説］

(3)の通過範囲の面積は，移動距離に注目すると，積分するまでもありません。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　△OPA は正三角形より，点 A は点 P を原点まわりに $\pm 60°$ 回転した点である。

$$\alpha = \left(\cos(\pm 60°) + i\sin(\pm 60°)\right)(1+i)$$
$$= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)(1+i)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \quad \text{（複号同順）}$$

よって，$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$，$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

(2)　α の実部が正なので，$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

△PAB は直角二等辺三角形で点 B は三角形 OPA の内部にあることより，点 B は点 A を点 P のまわりに $-45°$ 回転した後, A からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点となる。

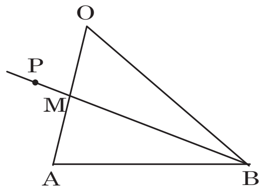
$$\beta - (1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(-45°) + i\sin(-45°)\right)\left\{\alpha - (1+i)\right\}$$
$$\beta = (1+i) + \frac{1}{2}(1-i)\cdot\frac{1}{2}\left\{(-1+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i\right\}$$
$$= (1+i) + \frac{1}{4}(-2-2\sqrt{3}i) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

［解　説］

複素数平面上での点の回転を題材としたセンターレベルの問題です。

4

問題のページへ



(1)　BP $= t$BM より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\vec{b}+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

(2)　△OAB に余弦定理を適用して，

$$7=2^2+3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

(3)　AP⊥BM より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=0$

(1)より，$\left(\left(\frac{1}{2}t-1\right)\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t-1\right)|\vec{a}|^2+\left(-t+\frac{3}{2}\right)(\vec{a}\cdot\vec{b})-(1-t)|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，また(2)より $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ なので，

$$7t-\frac{13}{2}=0,\quad t=\frac{13}{14}$$

［解 説］

コメントのしようがないくらいの基本問題です。