

1

解答解説のページへ

複素数平面上に三角形 ABC があり、その頂点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ z_1 , z_2 , z_3 とする。複素数 w に対して、 $z_1 = wz_3$, $z_2 = wz_1$, $z_3 = wz_2$ が成り立つとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $1 + w + w^2$ の値を求めよ。
- (2) 三角形 ABC はどんな形の三角形か。
- (3) $z = z_1 + 2z_2 + 3z_3$ の表す点を D とすると、三角形 OBD はどんな形の三角形か。
ただし、O は原点である。

2

解答解説のページへ

$a_1 = 1$, $a_n \neq 0$, $a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。ただし, S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和である。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) $\sqrt{S_n}$ を求めよ。
- (3) a_n を求めよ。

3

解答解説のページへ

(1) $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とするとき, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$ を証明せよ。

(2) 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ を考える。ただし, (a_1, a_2) と (b_1, b_2) はともに円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあり, a_1, a_2, b_1, b_2 はすべて 0 以上の数とする。次の 2 つの等式 $A^3 = B^2$, $AB = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ が成り立つとき, A, B を求めよ。

4

解答解説のページへ

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対し, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x} \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, $f_n(0) = n$ で与えられる関数の列 $\{f_n(x)\}$ と $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$ からなる数列 $\{I_n\}$ とがある。

- (1) $f_n(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ。
- (2) $I_{n+1} - I_{n-1}$ を n の式で表せ。
- (3) $S_m = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{2k-1}$ とするとき, I_n を S_m を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

四面体 $OABC$ において $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 6$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$ とする。 OA を $t:1-t$ の比に内分する点を D , $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{DC} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\angle BDC = \theta$ としたとき $\cos \theta$ を t の式で表せ。
- (3) 三角形 BDC の面積の最小値を求めよ。

1

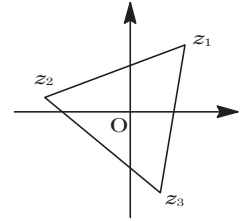
問題のページへ

- (1) 条件より, $z_1 = wz_3 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $z_2 = wz_1 \cdots \cdots \textcircled{2}$, $z_3 = wz_2 \cdots \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より $z_2 = w^2 z_3$ なので, $z_1 + z_2 + z_3 = (w + w^2 + 1)z_3 \cdots \cdots \textcircled{4}$
 $\textcircled{2}\textcircled{3}$ より $z_3 = w^2 z_1$ なので, $z_1 + z_2 + z_3 = (1 + w + w^2)z_1 \cdots \cdots \textcircled{5}$
 $\textcircled{4}\textcircled{5}$ より, $(1 + w + w^2)(z_1 - z_3) = 0$
 $z_1 \neq z_3$ より, $1 + w + w^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$

- (2) $\textcircled{4}\textcircled{6}$ より $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ なので, $\triangle ABC$ の重心は原点となる。

$$\text{また}\textcircled{6}\text{より, } w = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos(\pm 120^\circ) + i \sin(\pm 120^\circ)$$

よって, 以下, 複号同順として, $\textcircled{2}$ より z_2 は z_1 を原点まわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点, $\textcircled{3}$ より z_3 は z_2 を原点まわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点, $\textcircled{1}$ より z_1 は z_3 を原点まわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点である。



以上より, $\triangle ABC$ は重心が原点の正三角形である。

- (3) $\textcircled{2}\textcircled{3}$ より, $z = z_1 + 2z_2 + 3z_3 = \frac{z_2}{w} + 2z_2 + 3wz_2 = \left(\frac{1}{w} + 2 + 3w\right)z_2$

ここで, $\textcircled{6}$ より $\frac{1}{w} = -1 - w$ となるので,

$$z = (-1 - w + 2 + 3w)z_2 = \left(1 + 2 \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)z_2 = \pm \sqrt{3}i \cdot z_2$$

- (i) $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき $z = \sqrt{3}i \cdot z_2$ より, z は z_2 を原点まわりに 90° 回転し, 原点との距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。
(ii) $w = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ のとき $z = -\sqrt{3}i \cdot z_2$ より, z は z_2 を原点まわりに -90° 回転し, 原点との距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。
(i)(ii)より, $\triangle OBD$ は, $\angle BOD = 90^\circ$, $\angle DBO = 60^\circ$ の直角三角形である。

[解説]

(1)と(2)の結論は, 与えられた $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ から推測できます。その推測の正しいことを, うまく示すのがポイントです。

2

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \frac{3(S_n - S_{n-1})}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} = \frac{3a_n}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}}$$

$$a_n \neq 0 \text{ なので, } \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = 3 \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ に } n = 2 \text{ を代入すると, } \sqrt{S_2} + \sqrt{S_1} = 3, \sqrt{a_1 + a_2} + \sqrt{a_1} = 3$$

$$a_1 = 1 \text{ より, } \sqrt{1 + a_2} + 1 = 3, a_2 = 3$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ より, } \sqrt{S_n} = -\sqrt{S_{n-1}} + 3, \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = 1$$

$$\sqrt{S_n} - \frac{3}{2} = -\left(\sqrt{S_{n-1}} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{よって, } \sqrt{S_n} - \frac{3}{2} = \left(\sqrt{S_1} - \frac{3}{2}\right)(-1)^{n-1} = -\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

$$\sqrt{S_n} = \frac{1}{2}\{3 - (-1)^{n-1}\} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(3) \textcircled{2} \text{ より, } a_n = 3(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \frac{3}{2}\{3 - (-1)^{n-1}\} - \frac{3}{2}\{3 - (-1)^{n-2}\}$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)(-1)^{n-2} = 3(-1)^n \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ に $n = 1$ をあてはめると, $a_1 = -3$ となり不成立。

よって, $a_1 = 1, a_n = 3(-1)^n \quad (n \geq 2)$

[解説]

文系の第 1 問の類題です。①のように、与えられた漸化式を予め変形しておく、解を求めやすくなるのは同じですが、(3)の結論は異なった形式となりました。

3

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad R(\theta)R(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R(\theta + \theta')
 \end{aligned}$$

(2) 条件より, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ とし, $a_1 = \cos \theta$, $a_2 = \sin \theta$, $b_1 = \cos \varphi$,

$b_2 = \sin \varphi$ とおくことができる。

$$A^3 = B^2 \text{ より, } \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

$$\cos 3\theta = \cos 2\varphi \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \sin 3\theta = \sin 2\varphi \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } 0 \leq 3\theta \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq 2\varphi \leq \pi \text{ なので } 3\theta = 2\varphi \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$AB = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\theta + \varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad \sin(\theta + \varphi) = \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{ より, } 0 \leq \theta + \varphi \leq \pi \text{ なので } \theta + \varphi = \frac{5}{6}\pi \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{6} \text{ より, } \theta = \frac{1}{3}\pi, \quad \varphi = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{よって, } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[解説]

(2)の元の設問は「 a_1, a_2, b_1, b_2 はすべて正の数とする」でしたが, これでは解なしとなります。ここでは, 問題文を修正して「 a_1, a_2, b_1, b_2 はすべて0以上の数とする」として解を作りました。本年度は, 阪大をはじめとして, 出題ミスが目立ちます。

4

問題のページへ

$$(1) \quad n \geq 1 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow +0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin nx}{nx} \cdot n = n$$

$$n = 0 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow +0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 0}{\sin x} = 0$$

よって, $\lim_{x \rightarrow +0} f_n(x) = f_n(0)$ となり, $f_n(x)$ は $x = 0$ で連続である。

$$\begin{aligned} (2) \quad I_{n+1} - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n-1)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos nx \sin x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos nx dx = \frac{2}{n} [\sin nx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n} \sin \frac{n}{2} \pi \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

(3) まず, $I_0 = 0$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ となり, (2) から l を自然数として,

$$(i) \quad n = 2l \text{ のとき } I_{2l+1} - I_{2l-1} = \frac{1}{l} \sin l\pi = 0 \text{ より, } I_{2l-1} = I_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$(ii) \quad n = 2l-1 \text{ のとき } I_{2l} - I_{2l-2} = \frac{2}{2l-1} \sin \frac{2l-1}{2} \pi = \frac{2}{2l-1} (-1)^{l-1}$$

$$I_{2l} = I_0 + \sum_{k=1}^l (I_{2k} - I_{2k-2}) = \sum_{k=1}^l \frac{2}{2k-1} (-1)^{k-1} = -2 \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^k}{2k-1} = -2S_l$$

(i)(ii) より, $I_0 = 0$, n が奇数のとき $I_n = \frac{\pi}{2}$, n が 2 以上の偶数のとき $I_n = -2S_{\frac{n}{2}}$

[解説]

(3) はおもしろい問題です。 n を偶奇に分けて考えると, (2) の結論がうまく利用できます。

5

問題のページへ

$$(1) \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{b} - t\vec{a}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \vec{c} - t\vec{a}$$

$$(2) \quad \text{条件より, } |\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 4, \quad |\vec{c}| = 6$$

$$\text{また, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cos 60^\circ = 6$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 12$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 6 \cdot 3 \cos 60^\circ = 9$$

$$\text{すると, } |\overrightarrow{DB}|^2 = |\vec{b} - t\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{a}|^2 = 9t^2 - 12t + 16$$

$$|\overrightarrow{DC}|^2 = |\vec{c} - t\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2t\vec{c} \cdot \vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 = 9(t^2 - 2t + 4)$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = (\vec{b} - t\vec{a}) \cdot (\vec{c} - t\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{c} - t\vec{a} \cdot \vec{b} - t\vec{c} \cdot \vec{a} + t^2|\vec{a}|^2 = 3(3t^2 - 5t + 4)$$

$$\text{よって, } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{3t^2 - 5t + 4}{\sqrt{9t^2 - 12t + 16} \sqrt{t^2 - 2t + 4}}$$

$$(3) \quad \triangle BCD = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}| \sin \theta = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{DC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 |\overrightarrow{DC}|^2 - (\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC})^2}$$

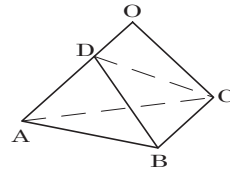
$$f(t) = \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 |\overrightarrow{DC}|^2 - (\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC})^2} \text{ とおくと, } \triangle BCD = \frac{1}{2} \sqrt{f(t)}$$

$$f(t) = 9(9t^2 - 12t + 16)(t^2 - 2t + 4) - 9(3t^2 - 5t + 4)^2$$

$$= 9(27t^2 - 40t + 48) = 9 \cdot 27 \left(t - \frac{20}{27} \right)^2 + \frac{896}{3}$$

よって, $t = \frac{20}{27}$ のとき $f(t)$ は最小値 $\frac{896}{3}$ をとり, このとき $\triangle BCD$ の面積は最小

となる。その最小値は, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{896}{3}} = \frac{4\sqrt{42}}{3}$ である。



[解説]

内容的には基本だけですが, 計算がたいへんです。特に(3)の計算では, 初めは $f(t)$ を微分して増減表を作り, 最小値をとる t の値を求めたのですが, その後, 最小値を求める気にはなりません。それで, また $f(t)$ からやり直したのが上の解です。