**1**

解答解説のページへ

関数 $y=(\sin^2\theta-2\sin\theta+3)^2+3(\cos 2\theta+4\sin\theta+1)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0°\leqq\theta<360°$ とする。

(1)　$\sin^2\theta-2\sin\theta+3=x$ とおくとき，$y$ を $x$ の式で表せ。また，$x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$y$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -1,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 2)$がある。点 P が四面体 OABC の辺 BC 上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は 3 であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{AOP}$ の大きさが最小になるときの点 P の座標を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

$a$ を正の定数とする。曲線 $y=x^2(x-a)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線 $l$ が $y$ 軸と交わる点を $\mathrm{H}(0,\ h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $h$ を $p$ の式で表せ。

(2) $p \geqq 0$ のとき, $h$ を最大にする $p$ の値を求めよ。また, そのときの接線 $l$ の方程式を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $y = x^2$ のグラフと点 $(0,\ r)$ を中心とする半径 $r$ の円が原点以外に共有点をもつような $r$ の値の範囲を求めよ。

(2)　連立不等式 $y \leqq x^2$， $x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$ の表す領域の面積を求めよ。

**5**

解答解説のページへ

1 から 7 までの番号が 1 つずつ書いてある 7 枚のカードの中から，1 枚ずつ 3 回抜き出す試行を考える。ただし，抜き出したカードはもとに戻さないものとする。この試行において，最後(3 回目)に抜き出したカードの番号が 1 回目および 2 回目に抜き出したカードの番号より大きければ，最後に抜き出したカードの番号が得点として与えられ，それ以外の場合の得点は 0 とする。次の問いに答えよ。

(1) 最後に抜き出したカードの番号が 3 である確率 $q$，および得点が 3 である確率 $p_3$ を求めよ。

(2) 得点が $k$（$3 \leqq k \leqq 7$）である確率 $p_k$ を $k$ の式で表せ。また，得点が 0 である確率 $p_0$ を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1)　$\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1 = 1 - 2\sin^2\theta + 4\sin\theta + 1 = -2(\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1)$ となるので，

$x = \sin^2\theta - 2\sin\theta + 3$ とおくと，

$$y = (\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3)^2 + 3(\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1)$$
$$= x^2 - 6(x - 4) = x^2 - 6x + 24$$

ここで，$x = (\sin\theta - 1)^2 + 2$ と変形すると，$0° \leqq \theta < 360°$ から $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ となり, $x$ のとりうる値の範囲は $2 \leqq x \leqq 6$ である。

(2)　(1)より, $2 \leqq x \leqq 6$ において，$y = (x - 3)^2 + 15$

よって，$x = 6$ のとき最大値 24 をとる。このとき，$(\sin\theta - 1)^2 + 2 = 6$ から，$\sin\theta = -1$ すなわち $\theta = 270°$ となる。

また，$x = 3$ のとき最小値 15 をとる。このとき，$(\sin\theta - 1)^2 + 2 = 3$ から，$\sin\theta = 0$ すなわち $\theta = 0°，180°$ となる。

［解 説］

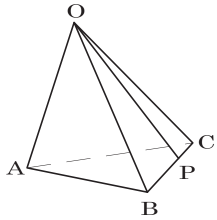
数Ⅱの教科書の例題あたりに載っていそうな基本問題です。

**2**

問題のページへ

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ -1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 1,\ 2)$

$0\leqq t\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。




$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=t(2-1+2)+(1-t)(0+1+2)\\&=3t+3(1-t)=3\end{aligned}$$

(2) まず，$\cos\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$

ここで，$\angle\mathrm{AOP}$ の大きさが最小になるのは，$\cos\angle\mathrm{AOP}$ が最大となるときで，このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小となる。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=t^2(4+1+4)+2t(1-t)(0-1+4)+(1-t)^2(0+1+4)\\&=8t^2-4t+5=8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

よって，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ は最小となり，このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ も最小となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}(2,\ -1,\ 2)+\frac{3}{4}(0,\ 1,\ 2)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$$

よって，$\angle\mathrm{AOP}$ の大きさが最小になる点 P の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$ である。

［解 説］

前問と同じく基本題です。方針に迷いは生じません。

## 3

問題のページへ

(1)　$y = x^2(x-a) = x^3 - ax^2$ から，$y' = 3x^2 - 2ax$

$x = p$ のとき $y' = 3p^2 - 2ap$ より，$\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線は，

$$y - p^2(p-a) = (3p^2 - 2ap)(x-p)$$

$$y = (3p^2 - 2ap)x - 2p^3 + ap^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$y$ 切片が $\mathrm{H}(0,\ h)$ より，$h = -2p^3 + ap^2 \cdots\cdots\cdots ②$

(2)　②より，$h' = -6p^2 + 2ap = -2p(3p-a)$

$a > 0$ より，$p = \dfrac{a}{3}$ のとき, $h$ は最大となる。

| $p$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{a}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $h$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

このとき接線は，①より，

$$y = -\frac{1}{3}a^2x + \frac{1}{27}a^3$$

### ［解 説］

$a$ が正なので，場合分けも必要なく，あっさり結論が導けます。

**4**

問題のページへ

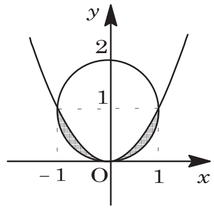
(1)　$y=x^2$……①と$x^2+(y-r)^2=r^2$……②の共有点は，①②より，

$$y+(y-r)^2=r^2,\ \ y^2-(2r-1)y=0$$

$0<y<2r$ に共有点をもつ条件は，$y=2r-1>0$，$r>\dfrac{1}{2}$

(2)　$r=1$のとき，①と②の原点以外の共有点は，$(\pm 1,\ 1)$

求める領域の面積を $S$ とすると, $y$ 軸に関する対称性より,




$$S=2\left\{\pi\cdot 1^2\cdot\frac{1}{4}+\int_0^1 x^2dx-1^2\right\}=2\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{3}$$

［解 説］

(1)の条件も簡単に求まるし, (2)の面積計算も複雑ではありません。

**5**

問題のページへ

(1)　3 回目のカードの番号が 3 であるのは, 1 回目, 2 回目が 3 以外より,

$$q=\frac{{}_6\mathrm{P}_2\times 1}{{}_7\mathrm{P}_3}=\frac{1}{7}$$

得点が 3 となるのは, 1 回目, 2 回目が 2 以下で, 3 回目が 3 より,

$$p_3=\frac{{}_2\mathrm{P}_2\times 1}{{}_7\mathrm{P}_3}=\frac{1}{105}$$

(2)　得点が $k$（$3\leqq k\leqq 7$）となるのは, 1 回目, 2 回目が $k-1$ 以下で, 3 回目が $k$ より,

$$p_k=\frac{{}_{k-1}\mathrm{P}_2\times 1}{{}_7\mathrm{P}_3}=\frac{(k-1)(k-2)}{210}$$

また, $p_0=1-\sum_{k=3}^{7}p_k=1-\frac{1}{210}\sum_{k=3}^{7}(k-1)(k-2)$

$$=1-\frac{1}{210}\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{7}\left\{k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)\right\}$$

$$=1-\frac{1}{630}\cdot 7\cdot 6\cdot 5=\frac{2}{3}$$

(3)　得点の期待値 $E$ は,

$$E=\sum_{k=3}^{7}k\,p_k=\frac{1}{210}\sum_{k=3}^{7}k(k-1)(k-2)$$

$$=\frac{1}{210}\cdot\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{7}\left\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\right\}$$

$$=\frac{1}{840}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=2$$

［解 説］

(2)と(3)は, $p_3$ から $p_7$ までの値を羅列するのが面倒でしたので, 数列の和の公式を用いました。もっとも広大・文系の範囲には, 数列は除外されていますが。