

1

解答解説のページへ

複素数平面上に、3点 $A(-2i)$ 、 $B(1-i)$ 、 $C(-1+3i)$ と、点 $D(1+i)$ を中心とする半径 1 の円 K がある。点 $P(z)$ は K の周上にあり、点 $Q(w)$ は、三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする(すなわち、 $AP : AQ = AB : AC$ で、 AP から AQ に反時計まわりに測った角が、 AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい)。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) w を z の式で表せ。
- (2) 点 P が円 K の周上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次の正方行列 A は, 次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。ただし, E は 2 次の単位行列である。

(a) A は逆行列 A^{-1} をもち, $A \neq E$ である。

(b) A^2 は A, A^{-1}, E のいずれかに等しい。

(c) $A \neq A^{-1}$

次の問いに答えよ。

(1) 条件(a)を用いて, $A \neq A^2$ を示せ。

(2) $A^2 = A^{-1}$ を示せ。

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$ のとき, p, q の値を定めよ。ただし, p, q は実数とする。

3

解答解説のページへ

1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと、1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ、次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ、さらに、97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下、この操作を続けて、 k 番目の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし、1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって、1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を N とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) N の値を求めよ。また、 N 番の箱には何枚のカードが入っているか。
- (2) k 番 ($1 \leq k \leq N$) の箱において、その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ。
- (3) k 番 ($1 \leq k \leq N$) の箱の中のカードに書かれている数の合計を S_k とする。 $1 \leq k \leq N-1$ のとき、 S_k を k の式で表せ。また、 $1 \leq k \leq N$ のとき、 S_k の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $y = f(x)$ ($x \neq 0$) の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べ、曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。
- (2) 右側からの極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在するか。存在するならばその値を求め、存在しないならばその理由をいえ。

5

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) 不定積分 $\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta$ を求めよ。
- (2) 媒介変数 θ を用いて、

$$x(\theta) = \int_0^\theta (1 + \tan u) du, \quad y(\theta) = \int_0^\theta (1 - \tan u) du \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。

6

解答解説のページへ

1つのさいころを n 回投げる試行において、出た目がすべて奇数で、かつ 1 の目がちょうど k 回 ($0 \leq k \leq n$) 出る確率を p_k とする。次の問いに答えよ。

(1) $n = 3$ のとき、 p_1 を求めよ。

(2) p_k ($0 \leq k \leq n$) を n と k の式で表せ。また、出た目がすべて奇数で、かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ。

(3) $n = 3m + 2$ (m は自然数) とする。 $0 \leq k \leq n - 1$ のとき、 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$ となる k の範囲を求めよ。さらに、 $0 \leq k \leq n$ のとき、 p_k が最大となる k を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\triangle APQ$ と $\triangle ABC$ が同じ向きに相似なので, $\frac{w-\alpha}{z-\alpha} = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ より,

$$\begin{aligned} w &= \alpha + \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}(z-\alpha) = -2i + \frac{-1+5i}{1+i}(z+2i) \\ &= -2i + (2+3i)(z+2i) = (2+3i)z - 6 + 2i \end{aligned}$$

(2) (1)より, $z = \frac{w+6-2i}{2+3i}$ ……………①

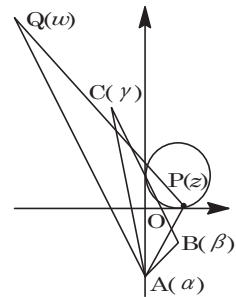
また条件より, $|z-(1+i)|=1$ ……………②

①を②に代入して, $\left| \frac{w+6-2i}{2+3i} - (1+i) \right| = 1$

$$\left| \frac{w+7-7i}{2+3i} \right| = 1, \quad \frac{|w+7-7i|}{|2+3i|} = 1$$

$$|w+7-7i| = |2+3i|, \quad |w-(-7+7i)| = \sqrt{13}$$

よって, 点 $Q(w)$ は点 $-7+7i$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円を描く。



[解説]

同じ向きに相似という条件式の説明は省略しました。もし解を丁寧に書くならば、絶対値と偏角を用いて説明をします。

2

問題のページへ

(1) $A = A^2$ と仮定すると, 条件(a)から A^{-1} が存在することより,

$$A^{-1}A = A^{-1}A^2, \quad E = A$$

これは条件(a)の $A \neq E$ に反する。

よって, $A \neq A^2$

(2) $A^2 = E$ とすると, $A \cdot A = E$ から $A = A^{-1}$ となり, 条件(c)に反する。

(1)の結果と合わせると, 条件(b)より, $A^2 = A^{-1}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$ のとき, (2)より, $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} = \frac{1}{-p} \begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p = -\frac{q}{p} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad pq = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad q = \frac{1}{p} \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad p + q^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④より $p = -q^2$, ②に代入して, $q^3 = -1$

q は実数より $q = -1$, $p = -1$

これは①③を満たすので, $p = q = -1$

[解説]

行列に関する基本問題です。ハミルトン・ケーリーの定理も出番がありません。

3

問題のページへ

(1) k 番の箱までに入っているカードの枚数の和は、 $1+2+3+\dots+k = \frac{1}{2}k(k+1)$

さて、1 のカードが N 番の箱に入っているとすると、

$$\frac{1}{2}(N-1)N < 100 \leq \frac{1}{2}N(N+1), \quad (N-1)N < 200 \leq N(N+1)$$

すると、 $13 \cdot 14 = 182$ 、 $14 \cdot 15 = 210$ より、 $N = 14$

また、13 番までの箱に入っているカードの枚数の和は $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91$ より、14 番

の箱に入っているカードは、 $100 - 91 = 9$ 枚である。

(2) k 番の箱に入っているカードは、100, 99, 98, 97, \dots と数えて、 $\frac{1}{2}(k-1)k+1$ 枚目

から $\frac{1}{2}k(k+1)$ 枚目までなので、最大数は $\frac{1}{2}(k-1)k+1$ 枚目となり、

$$100 + \left\{ \frac{1}{2}(k-1)k+1-1 \right\} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 100$$

(3) k 番の箱に入っているカードの最小数は $\frac{1}{2}k(k+1)$ 枚目で、

$$100 + \left\{ \frac{1}{2}k(k+1)-1 \right\} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 101$$

すると、 $1 \leq k \leq 13$ のとき、

$$S_k = \frac{\left(-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 101\right) + \left(-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 100\right)}{2} \cdot k = -\frac{1}{2}k^3 + \frac{201}{2}k$$

ここで、 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{201}{2}x$ ($1 \leq x \leq 13$) とおくと、

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{201}{2} = -\frac{3}{2}(x^2 - 67)$$

右表より、 $f(x)$ は $x = \sqrt{67}$ のとき最大値

x	0	\dots	$\sqrt{67}$	\dots	13
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		\nearrow		\searrow	

をとる。

よって、 $8 < \sqrt{67} < 9$ で、 $f(8) = 548$ 、 $f(9) = 540$ となるので、 $1 \leq k \leq 13$ のとき、 S_k は $k = 8$ のとき最大となる。

なお $k = 14$ のとき、 $S_k = 9 + 8 + \dots + 1 = 45$ となるので、 $1 \leq k \leq 14$ において、 S_k の最大値は $S_8 = 548$ である。

[解説]

長い問題文ですが、要は、初項 100、公差 -1 の等差数列をグループ分けした群数列の問題です。各群の項数に注目するのがポイントです。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ より, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$$f''(x) = \frac{(2x-1)x^2 - (x^2-x-2) \cdot 2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{5x+2}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

右表より, 極大値は $\frac{1}{e}$ ($x = -1$), 極小値は $4\sqrt{e}$ ($x = 2$) となる。

また, $x = -\frac{2}{5}$ のとき

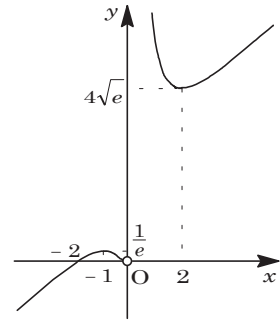
x	...	-1	...	$-\frac{2}{5}$...	0	...	2	...	
$f'(x)$		+		-		-	×	-	0	+
$f''(x)$		-		-	0	+	×	+		+
$f(x)$		↪	$\frac{1}{e}$	↩		↪	×	↩	$4\sqrt{e}$	↪

$y = \frac{8}{5e^2\sqrt{e}}$ より, 変曲点は $\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5e^2\sqrt{e}}\right)$ である。

さらに, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり,

$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ より, $y = f(x)$ の概形は

右図のようになる。



(2) (1)より, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{3}{f(x)} - 1}{\frac{1}{f(x)} + 2} = -\frac{1}{2}$$

(3) (1)より, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ なので, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)} = 3$ となり,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$$

したがって, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在しない。

[解説]

微分の計算力だけの問題です。特に(3)は構えていたのですが, 拍子抜けしました。

5

問題のページへ

$$(1) \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} \right) \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \log(1 + \sin \theta) - \log(1 - \sin \theta) \right\} + C = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} + C$$

$$(2) x(\theta) = \int_0^\theta (1 + \tan u) du, \quad y(\theta) = \int_0^\theta (1 - \tan u) du \text{ より,}$$

$$\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2 = (1 + \tan \theta)^2 + (1 - \tan \theta)^2 = 2(1 + \tan^2 \theta) = \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

すると、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ における曲線の長さを l とすると、(1)より、

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{2}{\cos^2 \theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log(2 + \sqrt{3})^2 = \sqrt{2} \log(2 + \sqrt{3})$$

[解説]

前問に対応して、本問は積分の計算力だけの問題です。(1)の誘導は、必要がないくらいです。

6

問題のページへ

(1) さいころを 3 回投げて, 1 の目が 1 回, 3 または 5 の目が 2 回出る確率 p_1 は,

$$p_1 = {}_3C_1 \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

(2) さいころを n 回投げて, 1 の目が k 回, 3 または 5 の目が $n-k$ 回出る確率 p_k は,

$$p_k = {}_n C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

また, n 回投げて, 出た目がすべて奇数の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ で, すべて 3 または 5 の目の確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ なので, 出た目がすべて奇数で, かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q は,

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) (2)より, $p_{k+1} = {}_n C_{k+1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}$ となるので,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}} = \frac{n-k}{2(k+1)}$$

$$\text{ここで, } \frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1 \Leftrightarrow n-k \leq 2(k+1) \Leftrightarrow k \geq \frac{n-2}{3} \Leftrightarrow k \geq m$$

よって, $k > m$ で $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$, $k = m$ のとき $\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$, $k < m$ で $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$ から,

$$p_0 < p_1 < p_2 \cdots < p_{m-1} < p_m = p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots > p_{3m+2}$$

以上より, p_k が最大となるのは $k = m$ または $k = m+1$ のときである。

[解説]

確率の最大値を求める典型問題です。誘導なしが普通です。