1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。

$$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$$

(2) 次の不等式を満たす y の範囲を求めよ。

$$9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$$

(3) x, y がそれぞれ(1), (2)の範囲を動くとき，$\log_2 x+2^y$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ と直線 l が 2 点で交わっている。それらの交点の x 座標を s, t $(s<t)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 l で囲まれた部分の面積 S は, $S=\dfrac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ。

(2) 直線 l が, 点 $(t,\ t^2)$ における $y=x^2$ の接線と直交しているとき, s を t で表せ。

(3) (2)のとき, (1)の面積 S の最小値, および最小値を与える t を求めよ。

3

解答解説のページへ

$y = a(\sin\theta + \cos\theta) + \sin 2\theta$ とする。ただし, a は正の定数である。

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて, y を t の式で表せ。

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値 M と最小値 m を, それぞれ a を用いて表せ。

4　解答解説のページへ

三角形 OAB において，辺 AB，BO をそれぞれ$1:2$に内分する点を M，N とする。また，線分 OM と AN の交点を P とする。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。

(2)　OM と AN が直交し，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$のとき，$\angle\mathrm{AOB}$を求めよ。

(3)　(2)のとき，さらに$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k , 2 個のさいころを同時に投げて出た 2 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k , 3 個のさいころを同時に投げて出た 3 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする。

(1) 事象 A_2, A_3, A_4 の確率 $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$ を, それぞれ求めよ。

(2) 事象 B_2, B_3, B_4 の確率 $P(B_2)$, $P(B_3)$, $P(B_4)$ を, それぞれ求めよ。

(3) 事象 C_2, C_3 の確率 $P(C_2)$, $P(C_3)$ を, それぞれ求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$に対して，$x-7>0$，$x-5>0$より$x>7$

$$\log_3(x-7)(x-5)\leqq 1,\ (x-7)(x-5)\leqq 3$$

まとめて，$x^2-12x+32\leqq 0$より, $4\leqq x\leqq 8$

$x>7$と合わせて, $7<x\leqq 8$

(2) $9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$より，$(3^y-9)(3^y+1)\leqq 0$

$3^y+1>0$なので，$3^y\leqq 9$より，$y\leqq 2$

(3) (1)(2)より，$\log_2 x\leqq \log_2 8=3$，$2^y\leqq 2^2=4$

したがって，$(x,\ y)=(8,\ 2)$のとき，$\log_2 x+2^y$は最大値$3+4=7$をとる。

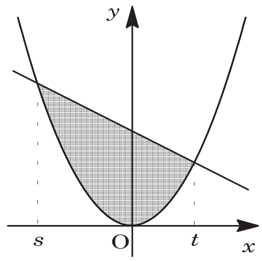
［解 説］

指数不等式と対数不等式の基本的な解法を問うものです。教科書の例に載っているような問題です。

2

問題のページへ

(1) 放物線 $y = x^2$ ……①，直線 l：$y = mx + n$ ……②



①②の交点は，$x^2 - mx - n = 0$ ………③

条件から，③の解が $x = s,\ t\ (s<t)$ なので，

$$x^2 - mx - n = (x-s)(x-t)$$

よって，$S = \int_s^t (mx + n - x^2)\,dx = -\int_s^t (x-s)(x-t)\,dx$

$$= -\int_s^t (x-s)(x-s+s-t)\,dx$$

$$= -\int_s^t \{(x-s)^2 - (t-s)(x-s)\}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\Big[(x-s)^3\Big]_s^t + \frac{1}{2}(t-s)\Big[(x-s)^2\Big]_s^t = \frac{1}{6}(t-s)^3$$

(2) 直線 l の傾きは，$m = \dfrac{t^2 - s^2}{t-s} = t + s$ である。また，①より $y' = 2x$ なので，点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ となり，条件より，

$$(t+s)\cdot 2t = -1\ ,\quad s = -t - \frac{1}{2t}$$

(3) (1)(2)より，$S = \dfrac{1}{6}\left(t + t + \dfrac{1}{2t}\right)^3 = \dfrac{1}{6}\left(2t + \dfrac{1}{2t}\right)^3$

ここで，$s<t$ より，$-t - \dfrac{1}{2t} < t$，$t + \dfrac{1}{2t} > 0$ となり，$t>0$ である。

すると，相加平均と相乗平均の関係から，

$$S = \frac{1}{6}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3 \geqq \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}\right)^3 = \frac{4}{3}$$

よって，S は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。このとき，$2t = \dfrac{1}{2t}$ から，$t = \dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

(3)まで含めて，有名な頻出問題の 1 つです。数Ⅱの微積分の標準的な問題です。

3

問題のページへ

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとき，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin 2\theta$ なので，

$$y=a(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta=at+(t^2-1)=t^2+at-1$$

(2)　$t=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　(1)(2)より，$y=\left(t+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-1\ (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$a>0$ より，$-\dfrac{a}{2}<0$ なので，$t=\sqrt{2}$ のとき最大値をとる。

$$M=2+\sqrt{2}a-1=\sqrt{2}a+1$$

また，$-\dfrac{a}{2}<-\sqrt{2}\ (a>2\sqrt{2})$ のときは，$t=-\sqrt{2}$ で最小値をとり，

$$m=2-\sqrt{2}a-1=-\sqrt{2}a+1$$

$-\dfrac{a}{2}\geqq-\sqrt{2}\ (0<a\leqq2\sqrt{2})$ のときは，$t=-\dfrac{a}{2}$ で最小値をとり，

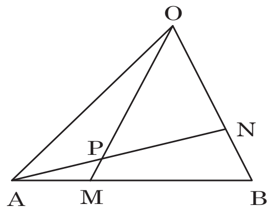
$$m=-\frac{a^2}{4}-1$$

［解 説］

ていねいな誘導がついていますが，この誘導がなくても完答が望まれます。

4

問題のページへ



(1)　M は AB を $1:2$ に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

次に, N は BO を $1:2$ に内分するので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

また, P は OM 上にあるので, k を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

さらに, P が AN 上にあるので，$\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}k=1$，$k=\frac{6}{7}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\vec{b}=\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}=0$ なので，$\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{1}{3}(-3\vec{a}+2\vec{b})=0$

$$-6|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=0$$

条件より，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ なので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\frac{16}{49}|\vec{a}|^2+2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{49}|\vec{b}|^2=\frac{28}{49}$ なので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\frac{28}{49}}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$$

［解　説］

ベクトルの平面図形への応用に関して，基本事項を確認するための問題です。

5

問題のページへ

(1)　出た目の数が 2 で割り切れる確率は $P(A_2)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，3 で割り切れる確率は $P(A_3)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, 4 で割り切れる確率は $P(A_4)=\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　出た 2 つの目の数の積が 2 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが偶数より，

$$P(B_2)=1-P(\overline{B_2})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

次に，積が 3 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが 3 の倍数より，

$$P(B_3)=1-P(\overline{B_3})=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

また，積が 4 で割り切れるのは，積が偶数という事象から，積が偶数であるが 4 の倍数でない事象，すなわち奇数と 2 または 6 の積という事象を除いた場合より，

$$P(B_4)=P(B_2)-P(B_2\cap\overline{B_4})=\frac{3}{4}-{}_2\mathrm{C}_1\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{12}$$

(3)　出た 3 つの目の数の積が 2 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが偶数より，

$$P(C_2)=1-P(\overline{C_2})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

次に，積が 3 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが 3 の倍数より，

$$P(C_3)=1-P(\overline{C_3})=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$$

［解 説］

(2)の $P(B_4)$ 以外は，あまりにも簡単すぎて，裏があるのではないかと勘ぐってしまいます。