1

解答解説のページへ

z は $0°<\arg z<90°$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(1)，B(z) を頂点とする△OAB を考える。また，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。

(1) $\alpha^2-\alpha+1$ の値を求めよ。

(2) 点 P(w) を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3) 点 Q($z+\alpha-\alpha z$) に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4) $\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は，$0°$ 以上 $360°$ 未満とする。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

$a>0$ とし，極方程式 $r=2a\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。

(2)　曲線 C と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，関係式

$$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n),\ a_{n+1}>a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まっている。

(1) a_2，a_3，a_4を計算せよ。

(2) 一般項a_nをnの式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$を求めよ。

4

解答解説のページへ

次のそれぞれの問いに答えよ。

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB=O$ を満たすとき，行列 A の 4 つの成分の積 $abcd$ は正または 0 であることを示せ。

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列をもたず，3 つの成分が正であるとき，残りの 1 つの成分も正であることを示せ。

(3) A, B を 2×2 行列とする。$AB=O$ かつ $B\neq O$ ならば，A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して，$f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$(e^x f(x))'=2xe^x$ を示せ。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は$\frac{1}{2}$とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$，負ける確率は$1-p$ であるとする。第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

(1) 第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

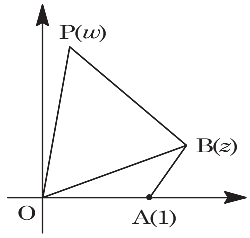
(2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ。

1

問題のページへ



(1)　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$2\alpha-1=\sqrt{3}i$ より，

$$4\alpha^2-4\alpha+1=-3,\ \ \alpha^2-\alpha+1=0$$

(2)　条件より，点 $\mathrm{P}(w)$ は点 $\mathrm{B}(z)$ を原点まわりに $60°$ 回転した点である。

$\alpha=\cos 60°+i\sin 60°$ より，$w=\alpha z$

(3)　$u=z+\alpha-\alpha z$ とおくと，$u-z=\alpha(1-z)$

よって，点 $\mathrm{Q}(u)$ は点 $\mathrm{A}(1)$ を点 $\mathrm{B}(z)$ のまわりに $60°$ 回転した点である。すなわち，$\triangle\mathrm{ABQ}$ は正三角形となる。

(4)　$v=\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}$ とおくと, (1)(2)より,

$$v=\frac{(1-\alpha)z+\alpha}{\alpha z-1}=\frac{-\alpha^2z+\alpha}{\alpha z-1}=\frac{-\alpha(\alpha z-1)}{\alpha z-1}=-\alpha$$

よって，$v=-\cos 60°-i\sin 60°=\cos 240°+i\sin 240°$ より，$\arg v=240°$

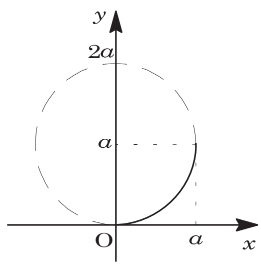
［解 説］

複素数平面上の正三角形が題材となっている頻出基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$r=2a\sin\theta=2a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$なので，曲線 C は，中心 $\left(a,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径 a の円を表す。



また $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，曲線 C は右図の実線部となる。

(2)　条件より，$x=r\cos\theta=2a\sin\theta\cos\theta=a\sin2\theta$

$y=r\sin\theta=2a\sin^2\theta=a(1-\cos2\theta)$

求める立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2(1-\cos2\theta)^2\cdot2a\cos2\theta\,d\theta$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos2\theta+\cos^22\theta)\cos2\theta\,d\theta$$

ここで，$2\theta=\varphi$ とおくと，

$$V=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}d\varphi$$

$$=\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-2\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\,d\varphi$$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

以上より，$V=\pi a^3\left(1-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=\pi\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)a^3$

[解 説]

与えられた極方程式はよく知られている原点を通る円を表すものです。なお，(2)は $x,\ y$ の関係で表し，積分した方が簡単でしたが……。

$\boxed{3}$　　問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=2$，$(a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n)$ ………(＊)

(＊)に $n=1$ を代入して，$(a_2-a_1)^2=2(a_2+a_1)$

$$(a_2-2)^2=2(a_2+2),\ a_2{}^2-6a_2=0,\ a_2(a_2-6)=0$$

$a_2>a_1=2$ より，$a_2=6$

次に,(＊)に $n=2$ を代入して，$(a_3-a_2)^2=2(a_3+a_2)$

$$(a_3-6)^2=2(a_3+6),\ a_3{}^2-14a_3+24=0,\ (a_3-2)(a_3-12)=0$$

$a_3>a_2=6$ より，$a_3=12$

さらに,(＊)に $n=3$ を代入して，$(a_4-a_3)^2=2(a_4+a_3)$

$$(a_4-12)^2=2(a_4+12),\ a_4{}^2-26a_4+120=0,\ (a_4-6)(a_4-20)=0$$

$a_4>a_3=12$ より，$a_4=20$

(2)　(1)より，$a_n=n(n+1)$ と推測でき，これが正しいことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1\cdot 2=2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=k(k+1)$ と仮定する。

(＊)に $n=k$ を代入して，$\{a_{k+1}-k(k+1)\}^2=2\{a_{k+1}+k(k+1)\}$

$$a_{k+1}{}^2-(2k^2+2k+2)a_{k+1}+k(k+1)(k-1)(k+2)=0$$

$$\{a_{k+1}-(k-1)k\}\{a_{k+1}-(k+1)(k+2)\}=0$$

$a_{k+1}>a_k=k(k+1)$ より $a_{k+1}=(k+1)(k+2)$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，$a_n=n(n+1)$

(3)　(2)より，

$$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n+1)}=\frac{(n+2)(n+1)-n(n+1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n+1)}}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+n^{-1})}{\sqrt{(1+2n^{-1})(1+n^{-1})}+\sqrt{1+n^{-1}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

［解 説］

初項から第 4 項までを求めることによって一般項を推測し，これを数学的帰納法で証明，さらに極限計算という作成者の意図がはっきりわかる問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　条件より，$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a+2b & 2a+b \\ 4c+2d & 2c+d \end{pmatrix}$

$AB=O$から，$2a+b=0$………①，$2c+d=0$………②

①より$b=-2a$，②より$d=-2c$なので，$abcd=4a^2c^2\geqq 0$

(2)　A^{-1}が存在しないことより，$ad-bc=0$，$ad=bc$………③

よって, 3 つの成分が正であるとき，③より残りの 1 つの成分も正である。

(3)　$AB=O$のとき，A^{-1}が存在すれば，

$$A^{-1}AB=A^{-1}O\text{，}\ B=O$$

これは$B\neq O$に反するので，A^{-1}は存在しない。

［解 説］

各問ともあまりにも簡単に解決するため，かえって不安が残ります。

5

問題のページへ

(1) 条件より，$f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt=x^2-x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt$ ……①

①に $x=0$ を代入すると，$f(0)=0$

また，①の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt-xf'(x)+xf'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt$$

$$=2x-\left[f(t)\right]_0^x=2x-f(x)+f(0)=2x-f(x) \cdots\cdots②$$

(2) ②より，$(e^x f(x))'=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x f(x)+e^x\{2x-f(x)\}=2xe^x$

(3) (2)より，$e^x f(x)=\int 2xe^x dx=2xe^x-\int 2e^x dx=2xe^x-2e^x+C$

$$f(x)=2x-2+Ce^{-x}=Ce^{-x}+2x-2$$

$f(0)=0$ より，$C-2=0$ となり，$C=2$

以上より，$f(x)=2e^{-x}+2x-2$

［解 説］

微分型の積分方程式ですが，誘導がていねいについているので，方針に迷うことはありません。

6

問題のページへ

(1)　第 4 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は, ACBB または BCAA である。

(2)　第 2 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は AA または BB より，その確率 F_2 は,

$$F_2=\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)=1-p$$

次に，第 3 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は ACC または BCC より，その確率 F_3 は,

$$F_3=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p^2=p^2$$

また，第 4 回戦で優勝者が決まる確率 F_4 は, (1)より,

$$F_4=\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p(1-p)$$

(3)　$n\geqq 2$ の場合に，第 $3n$ 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は，$3(n-1)$ 回まで ACBACB……ACB とくり返し最後の 3 回が ACC となる場合，および $3(n-1)$ 回まで BCABCA……BCA とくり返し最後の 3 回が BCC となる場合である。この確率 F_{3n} は,

$$F_{3n}=\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p^2+\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p^2=p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}$$

(4)　(3)の式に $n=1$ をあてはめると $F_3=p^2$ となるが，これは(2)より $n=1$ に対しても(3)の式が成立していることを示す。

さて，$0<p<1$ より $0<\frac{1}{2}p(1-p)<1$ なので,

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_{3n}=p^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}=\frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}=\frac{2p^2}{2-p+p^2}$$

［解 説］

問題文が長いのですが，これは詳しすぎるくらいのヒントです。なお，本問は有名な巴戦の問題で，本年は北大でも出ています。