1

解答解説のページへ

2 次関数 $y=3ax^2-2(b+1)x+b+1$ のグラフ F について，次の問いに答えよ。

(1)　a，b をともに 1 から 6 までの整数とするとき，F と x 軸との共有点の個数がただ 1 つであるような定数 a, b の値の組をすべて求めよ。

(2)　さいころを続けて 2 回投げ，定数 a，b の値を 1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b と決める。このとき，F と x 軸との共有点の個数の期待値 E を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC において，辺 BC を $2:1$ の比に内分する点を M とする。辺 AB, AC をそれぞれ B, C の側に延長した半直線を l, m とし，M を通る直線 k と l, m との交点をそれぞれ P, Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。ただし，p, q は正の実数とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{q}=3$ が成り立つことを示せ。

(3) Q から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$, q で表せ。

(4) M を通る直線 k が半直線 l, m と点 A 以外でそれぞれ交わるように変わるとき，三角形 APQ の面積を最小にする p, q の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) a, b, c, d を正の整数とする。$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ ならば，$a=c$，$b=d$ であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。

(2) 次の 2 つの数 r，s はそれぞれ，a，b を正の整数として，$(a+b\sqrt{2})^2$ と表すことができるか。表すことができれば，a，b の値を求めよ。表すことができなければ，その理由を示せ。

$$r=967+384\sqrt{2}\,,\quad s=2107+1470\sqrt{2}$$

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　a を 0 でない実数とするとき，2 つの曲線 $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ。

(2)　a_0 を(1)で求めた a の範囲の最大値とするとき，定積分

$$I=\int_0^2 \left|(-a_0x^2+1)-(-x^2+2x)\right|dx$$

を求めよ。

5

解答解説のページへ

不等式$\log_a b+\log_a(k-b)>2$を満たす実数 a, b について，次の問いに答えよ。ただし, k は $k>2$ を満たす定数とする。

(1) 点$(a,\ b)$全体の集合を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a+b$がとる値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$F: y=3ax^2-2(b+1)x+b+1$ と x 軸との共有点の個数がただ 1 つであるのは，
$3ax^2-2(b+1)x+b+1=0$ が重解をもつときで，

$$D/4=(b+1)^2-3a(b+1)=(b+1)(b+1-3a)=0$$

a, b は $1\leqq a\leqq 6$, $1\leqq b\leqq 6$ を満たす整数なので，

$$b+1-3a=0,\ 3a=b+1$$

よって，$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 5)$

(2)　F と x 軸との共有点の個数が 1 つである確率は，(1)より $\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{2}{36}$ である。

また，共有点の個数が 2 つである場合は，$D/4>0$ より $3a<b+1$ であり，

$$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 6)$$

よって，この場合の確率は $\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$ となる。

以上より，F と x 軸との共有点の個数の期待値 E は，

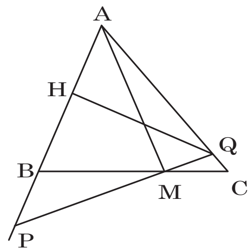
$$E=0\times\left(1-\frac{2}{36}-\frac{5}{36}\right)+1\times\frac{2}{36}+2\times\frac{5}{36}=\frac{1}{3}$$

［解 説］

期待値を求める基本問題です。

2

問題のページへ



(1)　BM : MC = 2 : 1 より，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$ ………①

(2)　PM : MQ = $t : 1-t$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-t)\,p\vec{b} + tq\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立なので，

$$\frac{1}{3} = (1-t)\,p\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad \frac{2}{3} = tq\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④より $t = \dfrac{2}{3q}$ となり，③に代入して，$\dfrac{1}{3} = \left(1-\dfrac{2}{3q}\right)p$

$$\frac{1}{3p} = 1-\frac{2}{3q},\quad \frac{1}{p}+\frac{2}{q} = 3\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = h\vec{b}$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{QH}} = h\vec{b} - q\vec{c}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{QH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から，$(h\vec{b}-q\vec{c})\cdot\vec{b} = 0$

$$h|\vec{b}|^2 - q\vec{b}\cdot\vec{c} = 0,\quad h = \frac{q\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{QH}} = \dfrac{q\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} - q\vec{c}$

(4)　$\triangle\mathrm{APQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin A = pq\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A = pq\triangle\mathrm{ABC}$ より，pq が最小値をとるとき，$\triangle$APQ の面積は最小となる。

$p>0,\ q>0$ より，相加平均・相乗平均の関係を用いると，⑤から，

$$3 = \frac{1}{p}+\frac{2}{q} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{q}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{pq}},\quad \sqrt{pq} \geqq \frac{2\sqrt{2}}{3},\quad pq \geqq \frac{8}{9}$$

等号成立は $\dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{q}$ のとき，すなわち⑤から $\dfrac{1}{p} = \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{2}{q} = \dfrac{3}{2}$ のときである。

よって，$\triangle$APQ の面積は，$p = \dfrac{2}{3}$，$q = \dfrac{4}{3}$ のとき最小となる。

［解 説］

ベクトルの平面図形への応用に関する頻出問題です。なお，(4)は(3)の結果を用いるまでもありません。

3

問題のページへ

(1)　$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ より，$a+b\sqrt{2}=\pm(c+d\sqrt{2})$

$a>0, b>0, c>0, d>0$ より，$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，$a-c=-(b-d)\sqrt{2}$

ここで，$b-d\neq 0$ とすると，$-\dfrac{a-c}{b-d}=\sqrt{2}$ となり，左辺は有理数，右辺は無理数となり成立しない。よって，$b-d=0$，$a-c=0$ となる。

すなわち，$a=c$，$b=d$ である。

(2)　$(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ となるので，$r=967+384\sqrt{2}$ については，

$$a^2+2b^2=967\cdots\cdots\cdots①,\ 2ab=384\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$ab=192=2^6\times 3\cdots\cdots\cdots③$

ここで，①から $a^2=967-2b^2$ なので，a^2 は奇数，すなわち a は奇数となる。

すると，③から $(a,\ b)=(1,\ 192)$，$(3,\ 64)$ となるが，いずれも①を満たさないので，r は $(a+b\sqrt{2})^2$ と表すことはできない。

次に，$s=2107+1470\sqrt{2}$ に対しては，

$$a^2+2b^2=2107\cdots\cdots\cdots④,\ 2ab=1470\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$ab=735=3\times 5\times 7^2$ となるので，a, b の少なくとも一方は 7 の倍数になる。また，④から $2107=7^2\times 43$ なので，a が 7 の倍数のときは b も 7 の倍数，b が 7 の倍数のときは a も 7 の倍数となる。すなわち, a, b はともに 7 の倍数である。

これより，a'，b' を整数として，$a=7a'$，$b=7b'$ とおくことができ，④⑤より，

$$a'^2+2b'^2=43\cdots\cdots⑥,\ a'b'=15\cdots\cdots⑦$$

⑦より，$(a',\ b')=(1,\ 15)$，$(3,\ 5)$，$(5,\ 3)$，$(15,\ 1)$ となるが，⑥を満たすのは $(a',\ b')=(5,\ 3)$ のみである。

よって，$(a,\ b)=(35,\ 21)$ となり，$s=(35+21\sqrt{2})^2$ と表せる。

[解 説]

広大で整数問題というのは，最近の記憶にありません。新傾向なのでしょうか。

4

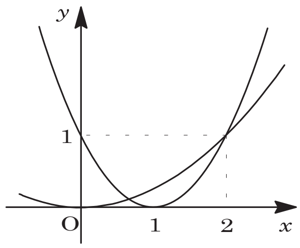
問題のページへ

(1)　2 曲線 $y=-x^2+2x$ ……①，$y=-ax^2+1$ ……②の共有点は，

$$-x^2+2x=-ax^2+1,\ ax^2=(x-1)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①と②が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲に 2 つの交点をもつ条件は，③から $y=ax^2$ と $y=(x-1)^2$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲に 2 つの交点をもつことに等しい。

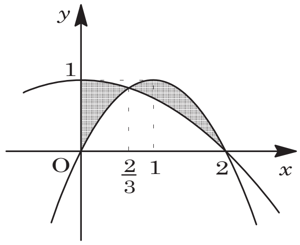
すると，$y=ax^2$ が点 $(2,\ 1)$ を通るのは，$1=4a$，$a=\dfrac{1}{4}$ なので，右図より，求める a の範囲は $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ である。



(2)　(1)より，$a_0=\dfrac{1}{4}$ となり，このとき①と②の交点は，③より，

$$\frac{1}{4}x^2=(x-1)^2,\ \pm\frac{1}{2}x=x-1$$

よって，$x=\dfrac{2}{3}$，$x=2$ となるので，



$$I=\int_0^2\left|\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-x^2+2x)\right|dx$$

$$=\int_0^2\left|\frac{3}{4}x^2-2x+1\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right)dx-\int_{\frac{2}{3}}^2\left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\int_{\frac{2}{3}}^2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{8}{27}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{27}$$

［解　説］

a が変化するとき，$y=ax^2$ のグラフの動きを考え，(1)は図から a の範囲を求めました。

5　　問題のページへ

(1)　$\log_a b+\log_a(k-b)>2$ に対し, $a>0$, $a\neq 1$, $0<b<k$ の条件のもとで,

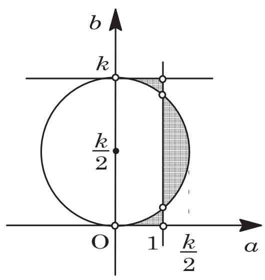
$$\log_a b(k-b)>2$$

(i)　$a>1$ のとき　$b(k-b)>a^2$

$$a^2+b^2-kb<0,\ a^2+\left(b-\frac{k}{2}\right)^2<\frac{k^2}{4}$$

(ii)　$0<a<1$ のとき　$b(k-b)<a^2$

$$a^2+b^2-kb>0,\ a^2+\left(b-\frac{k}{2}\right)^2>\frac{k^2}{4}$$



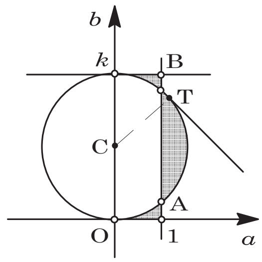
$k>2$ より $\frac{k}{2}>1$ となり, 求める領域は右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。

(2) 直線 $a=1$ と円 $a^2+b^2-kb=0$ との 2 つの交点のうち, 下側の交点を A とすると, $b^2-kb+1=0$ から $b=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$ となり, $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}\right)$である。

また, 直線 $a=1$ と直線 $b=k$ との交点を $\mathrm{B}(1,\ k)$ とする。

さらに, 円 $a^2+b^2-kb=0$ の中心を C, 傾き -1 の直線とこの円の接点を T とすると, $\overrightarrow{\mathrm{CT}}$ 向きの単位ベクトルの成分が $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)$ となることを用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\left(0,\ \frac{k}{2}\right)+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}k,\ \frac{2+\sqrt{2}}{4}k\right)$$



さて, $a+b=p$ とおくと, この直線が点 A を通るとき $p=\dfrac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2}$, 点 B を通るとき $p=1+k$, 点 T を通るとき $p=\dfrac{\sqrt{2}}{4}k+\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}k=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}k$ となる。

(i)　$1+k\geqq\frac{1+\sqrt{2}}{2}k$ $(2<k\leqq 2+2\sqrt{2})$ のとき

$a+b=p$ がとる値の範囲は, 図より,

$$0<a+b<\frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2},\ \frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2}<a+b<1+k$$

(ii)　$1+k<\frac{1+\sqrt{2}}{2}k$ $(k>2+2\sqrt{2})$ のとき　$a+b=p$ がとる値の範囲は, 図より,

$$0<a+b<\frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2},\ \frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2}<a+b<\frac{1+\sqrt{2}}{2}k$$

［解 説］

(2)は難問というよりは, 繁雑な問題というべきで, たいへん疲れます。