

1

解答解説のページへ

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、複素数平面において $0 \leq \arg z \leq \pi - \theta$ を満たすすべての点 $z (\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

- (1) 複素数平面上に D を図示せよ。
- (2) a を $a > 0$ を満たす実数とする。このとき、 D に属する点 z に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|z| \sin \theta \leq |z + a|$$

また、等号が成り立つときの z を a, θ を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

$$S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ について、 $\frac{1}{\pi(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n S_k$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を $2 < a < 3$ を満たす定数とし、 $f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - \left| e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right| \right)$ と

おく。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの $y \geq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x = \log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

4

解答解説のページへ

F 君は G 君の投げるボールを確率 p ($0 < p < 1$) でヒットする。自然数 n に対して、1 から n までの数字を 1 つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある。G 君が箱 B_n から勝手にカードを 1 枚引いて、カードに書かれている数字の回数だけ F 君にボールを投げる試行を考える。

- (1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を q_k 、また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき、 $(k+1)r_k - kq_k$ を p, k を用いて表せ。
- (2) 箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を q_j ($0 \leq j \leq k$)、箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を r_j ($0 \leq j \leq k+1$) とするとき、 $(k+1)r_j - kq_j$ ($0 \leq j \leq k$) を p, k, j を用いて表せ。
- (3) 箱 B_n を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を p_j ($0 \leq j \leq n$) とし、 $\alpha = pt + 1 - p$ とすると、変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ。

$$p_0 + p_1t + p_2t^2 + \cdots + p_nt^n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)$$

- (4) 箱 B_n を用いた試行において、F 君が打つヒットの数の期待値 E を n, p を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

a, b を $a^2 - 4b < 0$ を満たす実数とする。

- (1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式

$$(*) \quad X^2 - aX + bE = O$$

を満たすならば, $x + w = a$, $xw - yz = b$ が成り立つことを示せ。ただし, O は 2 次の零行列であり, E は 2 次の単位行列である。

- (2) 等式(*)を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を S とする。 S に属する行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(**) \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 2b$$

また, 等号が成り立つときの X を a, c を用いて表せ。ただし, $c = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ とする。

- (3) A, B を不等式(**)において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列とする。このとき, $(X - A)(X - B) = O$ を満たす S に属する行列 X は A または B であることを示せ。

1

- (1) 原点を含み, $0 \leq \arg z \leq \pi - \theta$ を満たす点 z の集合 D は, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。
- (2) $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi - \theta$) とおく。

$$\begin{aligned} |z+a|^2 &= |(r \cos \varphi + a) + ir \sin \varphi|^2 \\ &= (r \cos \varphi + a)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \\ &= r^2 + 2ra \cos \varphi + a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } |z+a|^2 - |z|^2 \sin^2 \theta &= r^2 + 2ra \cos \varphi + a^2 - r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 \cos^2 \theta + 2ra \cos \varphi + a^2 \\ &\geq r^2 \cos^2 \theta + 2ra \cos(\pi - \theta) + a^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta - 2ra \cos \theta + a^2 \\ &= (r \cos \theta - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $|z| \sin \theta \leq |z+a|$ が成り立つ。

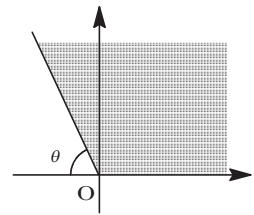
等号は, $\varphi = \pi - \theta$ かつ $r \cos \theta - a = 0$ のとき成立し, このとき z は,

$$z = \frac{a}{\cos \theta} \{ \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) \} = \frac{a}{\cos \theta} (-\cos \theta + i \sin \theta) = -a + ia \tan \theta$$

[解説]

初めは, (2)を図形的に考えようとしてしました。しかし, z の位置について, 場合分けが出てきそうなので止め, 式計算で証明をしました。

問題のページへ



2

問題のページへ

(1) $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ において, $1 - \cos x \geq 0$ より,

$$\frac{1 - \cos x}{\pi^2(n+1)^2} \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1 - \cos x}{\pi^2 n^2}$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{\pi^2(n+1)^2} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{\pi^2 n^2} dx$$

ここで, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1 - \cos x) dx = [x - \sin x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \pi$ より,

$$\frac{\pi}{\pi^2(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{\pi}{\pi^2 n^2}, \quad \frac{1}{\pi(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{1}{\pi n^2}$$

(2) (1)から $\pi k^2 \leq \frac{1}{S_k} \leq \pi(k+1)^2$ なのので, $\pi \sum_{k=1}^n k^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} \leq \pi \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \pi \sum_{l=2}^{n+1} l^2$

$$\frac{\pi}{6} n(n+1)(2n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} \leq \frac{\pi}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) - \pi \cdot 1^2$$

$$\frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} \leq \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right) - \frac{\pi}{n^3}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right) - \frac{\pi}{n^3} \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} = \frac{\pi}{3}$$

[解説]

誘導に従っていけば, 方針を迷うこともありません。演習に適切な無理のない問題です。

3

問題のページへ

$$(1) e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} = \frac{(a - 1)e^x - 2a + 2}{a - 2} = \frac{(a - 1)(e^x - 2)}{a - 2}$$

$2 < a < 3$ より, $e^x \geq 2$ ($x \geq \log 2$) のとき $e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \geq 0$, $e^x < 2$ ($x < \log 2$)

のとき $e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} < 0$ である。

(i) $x \geq \log 2$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - e^x + 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} \right) = \frac{a - e^x}{a - 2}$$

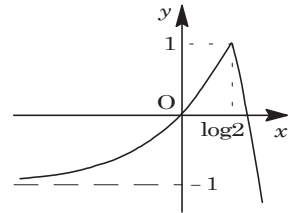
(ii) $x < \log 2$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} + e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right) = e^x - 1$$

したがって, $y = f(x)$ のグラフの概形は, 右図のようになる。

(2) $y = f(x)$ の $x \geq \log 2$ の部分を, 直線 $x = \log 2$ に関して対称移動したグラフを $y = g(x)$ とすると,

$$g(x) = \frac{a - e^{2\log 2 - x}}{a - 2} = \frac{a - 4e^{-x}}{a - 2}$$



$0 \leq x \leq \log 2$ のとき, $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 - \frac{a - 4e^{-x}}{a - 2}$ とおくと,

$$h'(x) = e^x - \frac{4e^{-x}}{a - 2}, \quad h''(x) = e^x + \frac{4e^{-x}}{a - 2} > 0$$

$0 \leq x \leq \log 2$ のとき, $h'(x) \leq h'(\log 2) = 2 - \frac{2}{a - 2} = \frac{2(a - 3)}{a - 2} < 0$

よって, $h(x) \geq h(\log 2) = 2 - 1 - \frac{a - 2}{a - 2} = 0$ から, $f(x) \geq g(x)$ となる。

すると, 求める立体は, $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq \log 2$ の部分を, 直線 $x = \log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体に等しいことより,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\log 2} 2\pi (\log 2 - x)(e^x - 1) dx \\ &= 2\pi \left\{ [(\log 2 - x)(e^x - x)]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} -(e^x - x) dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ -\log 2 + \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\log 2} \right\} = 2\pi \left\{ -\log 2 + 1 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 \right\} \\ &= \pi \left\{ -(\log 2)^2 - 2\log 2 + 2 \right\} \end{aligned}$$

[解説]

回転軸の両側に図形があるので, その位置関係の考察が面倒です。なお, 体積はいわゆる円筒分割で計算しています。

4

問題のページへ

(1) まず, G が箱 B_k から数字 k のカードを引いて, F が k 回すべてヒットを打つ確率 q_k は, $q_k = \frac{1}{k} \cdot p^k$ である。

また, G が箱 B_{k+1} から $k+1$ のカードを引いて F が k 回ヒットを打つか, k のカードを引いて k 回すべてヒットを打つか, いずれかが起こる確率 r_k は,

$$r_k = \frac{1}{k+1} \cdot {}_{k+1}C_k p^k (1-p) + \frac{1}{k+1} \cdot p^k = \frac{p^k}{k+1} \{ (k+1)(1-p) + 1 \}$$

よって, $(k+1)r_k - kq_k = p^k \{ (k+1)(1-p) + 1 \} - p^k = (k+1)(1-p)p^k$

(2) (1)と同様にして, G が箱 B_k から数字 $i (1 \leq j \leq i \leq k)$ のカードを引いて, F が j 本ヒットを打つ確率 q_j は,

$$q_j = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^k i C_j p^j (1-p)^{i-j}$$

また, G が箱 B_{k+1} から数字 $i (1 \leq j \leq i \leq k)$ のカードを引いて, F が j 本ヒットを打つ確率 r_j は,

$$r_j = \frac{1}{k+1} \sum_{i=j}^{k+1} i C_j p^j (1-p)^{i-j}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } (k+1)r_j - kq_j &= \sum_{i=j}^{k+1} i C_j p^j (1-p)^{i-j} - \sum_{i=j}^k i C_j p^j (1-p)^{i-j} \\ &= {}_{k+1}C_j p^j (1-p)^{k+1-j} \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

なお, $j=0$ のときは,

$$(k+1)r_0 - kq_0 = (k+1) \cdot \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (1-p)^i - k \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (1-p)^i = (1-p)^{k+1}$$

よって, ①は $j=0$ のときも成立する。

(3) 箱 B_n を用いた試行で F が j 本ヒットを打つ確率を p_j とするとき,

$$n(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n) = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n \dots\dots\dots (*)$$

が成立することを, n についての数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき

箱 B_1 を用いた試行より, $p_0 + p_1 t = (1-p) + pt = \alpha$ となり, 成立する。

(ii) $n=k$ のとき

箱 B_k を用いた試行について, $k(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_k t^k) = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k$ の成立を仮定すると, (2)より $p_k = q_k$ なので,

$$k(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_k t^k) = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

また, $0 \leq j \leq k$ のとき, ①より, $(k+1)r_j = kq_j + {}_{k+1}C_j p^j (1-p)^{k+1-j}$

$$(k+1)r_j t^j = kq_j t^j + {}_{k+1}C_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j}$$

$$(k+1) \sum_{j=0}^k r_j t^j = k \sum_{j=0}^k q_j t^j + \sum_{j=0}^k {}_{k+1}C_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

さて、箱 B_{k+1} を用いた試行について、(2)より $p_k = r_k$ なので、

$$(k+1)(p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k + p_{k+1} t^{k+1}) = (k+1)(r_0 + r_1 t + \dots + r_k t^k + r_{k+1} t^{k+1})$$

②③を代入すると、

$$\begin{aligned} (k+1)(p_0 + p_1 t + \dots + p_k t^k + p_{k+1} t^{k+1}) &= (k+1) \sum_{j=0}^k r_j t^j + (k+1) r_{k+1} t^{k+1} \\ &= k \sum_{j=0}^k q_j t^j + \sum_{j=0}^k {}_{k+1}C_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} + (k+1) r_{k+1} t^{k+1} \\ &= \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k + \sum_{j=0}^k {}_{k+1}C_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} + (k+1) r_{k+1} t^{k+1} \\ &= \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k + \sum_{j=0}^k {}_{k+1}C_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} + (k+1) \cdot \frac{1}{k+1} p^{k+1} t^{k+1} \\ &= \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k + \sum_{j=0}^{k+1} {}_{k+1}C_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} \\ &= \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k + (pt+1-p)^{k+1} = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k + \alpha^{k+1} \end{aligned}$$

よって、 $n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より、すべての自然数 n で(*)は成立するので、

$$p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n = \frac{1}{n} (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n)$$

(4) (*)の両辺を t で微分すると、 $\frac{d\alpha}{dt} = p$ より、

$$n(p_1 + 2p_2 t + \dots + np_n t^{n-1}) = (1 + 2\alpha + \dots + n\alpha^{n-1}) p$$

$t=1$ のとき $\alpha=1$ なので、 $n(p_1 + 2p_2 + \dots + np_n) = (1 + 2 + \dots + n) p$

$$n(p_1 + 2p_2 + \dots + np_n) = \frac{1}{2} n(n+1) p$$

すると、箱 B_n を用いた試行において、Fが打つヒットの数の期待値 E は、

$$E = p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = \frac{1}{2} (n+1) p$$

[解説]

(1)を一般化すると(2)となり、(2)を利用して(3)の証明をするというように問題が構成されています。ただ、30分程度で完答できるとは思えません。

5

問題のページへ

(1) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ のとき, ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$X^2 - (x+w)X + (xw - yz)E = O \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{条件より, } X^2 - aX + bE = O \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{より, } (-x-w+a)X + (xw - yz - b)E = O \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $-x-w+a \neq 0$ のとき, $X = \frac{xw - yz - b}{x+w-a}E = kE$ ($k = \frac{xw - yz - b}{x+w-a}$) となり, $\textcircled{2}$ に代入すると, $(k^2 - ak + b)E = O$, $k^2 - ak + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$

条件から $a^2 - 4b < 0$ なので, $\textcircled{4}$ の解 k は実数でない。よって, 題意に適さない。

すると, $\textcircled{3}$ より, $-x-w+a=0$, $xw - yz - b = 0$

$$x+w=a, \quad xw - yz = b \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } \textcircled{5}\text{より, } x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2b &= (x-w)^2 + 2xw + (y+z)^2 - 2yz - 2b \\ &= (x-w)^2 + (y+z)^2 + 2b - 2b \\ &= (x-w)^2 + (y+z)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

等号が成り立つのは, $w=x$, $z=-y$ のときである。

$\textcircled{5}$ より, $2x=a$, $x^2 + y^2 = b$ となり, $x = \frac{a}{2}$, $y = \pm \sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = \pm c$ から,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

(3) $(X-A)(X-B) = O$ に対して,

(i) $(X-A)^{-1}$ が存在するとき $X-B=O$ より, $X=B$

(ii) $(X-B)^{-1}$ が存在するとき $X-A=O$ より, $X=A$

(iii) $(X-A)^{-1}$, $(X-B)^{-1}$ がともに存在しないとき

S に属する 2 つの相異なる行列 A, B を, $c > 0$ から次のようにおくことができる。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & c \\ -c & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -c \\ c & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

すると, $X-A = \begin{pmatrix} x - \frac{a}{2} & y - c \\ z + c & w - \frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $X-B = \begin{pmatrix} x - \frac{a}{2} & y + c \\ z - c & w - \frac{a}{2} \end{pmatrix}$ となり,

$$\det(X-A) = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(w - \frac{a}{2}\right) - (y-c)(z+c) = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\det(X-B) = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(w - \frac{a}{2}\right) - (y+c)(z-c) = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6}\text{より, } xw - \frac{a}{2}(x+w) + \frac{a^2}{4} - yz - cy + cz + c^2 = 0$$

$$\textcircled{5} \text{より, } b - \frac{a^2}{4} - c(y-z) + c^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{より, 同様にして, } b - \frac{a^2}{4} + c(y-z) + c^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8}\textcircled{9} \text{より } c(y-z) = 0, c > 0 \text{ より } y = z \text{ となり, } \textcircled{8} \text{に代入すると, } b - \frac{a^2}{4} + c^2 = 0$$

$$b - \frac{a^2}{4} + b - \frac{a^2}{4} = 0, b - \frac{a^2}{4} = 0$$

これは $a^2 - 4b < 0$ に反し, 不適となる。

(i)(ii)(iii)より, $X = A$ または $X = B$ である。

[解説]

小問 3 題とも証明であり, この最後の問題も時間を費やします。なお, (2)では⑤の利用を考えて, 式変形をしました。