1

解答解説のページへ

a, b を実数とする。x の方程式 $4^x + a\times 2^{x+1} + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$a = -1$，$b = -3$ のときの解を求めよ。

(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもつような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を，座標平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

$-180^\circ < x < 180^\circ$ とする。c を実数とする。x の方程式

$$(*)\qquad \sin x + \sqrt{3}\cos x + c = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　$(*)$を $\sin(x + A) = B$ の形で表せ。また，$c = \sqrt{3}$ のとき, x の値を求めよ。

(2)　$(*)$が異なる 2 つの解 α，β をもつための c の条件を求めよ。

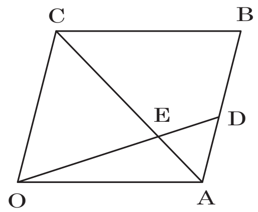
(3)　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。さらに，$(*)$を t についての 2 次方程式で表せ。

(4)　(2)の条件のもとで，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

平行四辺形 OABC の辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とし，線分 OD と対角線 AC との交点を E とする。次の問いに答えよ。



(1)　公式 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ を証明せよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$m$，$n$ を用いて表せ。

(3)　4 点 O, A, B, C を xy 平面上の点とし，3 点 O, A, C の座標を $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(a,\ b)$ とする。ただし，a，b は正の数とする。$m=1$，$n=2$ のとき，2 点 O, D を通る直線の方程式を求めよ。

(4)　(3)の条件のもとで，点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

補足説明：「点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H」とは，点 C から引いた線分 OD への垂線と線分 OD との交点 H のことである。

4

解答解説のページへ

$f(x)=x^2-4x+5$とする。$p<2<q$とし，放物線$y=f(x)$上の2点$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$における接線を，それぞれl，mとする。lとmは点$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\ r\right)$で交わり，それぞれの傾きを$a$，$b$とするとき，$2a+b=0$を満たすものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p, q, rを求めよ。

(2) 接線l, mの方程式を求めよ。

(3) 放物線$y=f(x)$と2つの接線l, mで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

5

解答解説のページへ

1, 2, 3, 4, 5 の数字を書いた 5 枚のカードがある。この 5 枚のカードを並べて 5 けたの数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1) 偶数となる並べ方は何通りあるか。また，奇数となる並べ方は何通りあるか。

(2) 5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する確率を求めよ。

(3) 5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 2 つの位で一致する確率を求めよ。

(4) 5 枚のカードを並べた数が，54321 と一致したときに 6 万円，54321 とちょうど 3 つの位で一致したときに 6 千円，54321 とちょうど 2 つの位で一致したときに 600 円もらえるものとする。これらの場合以外は何ももらえないものとする。5 枚のカードをよく切って並べる 1 回の試行での期待金額を求めよ。

補足説明 : (2)「それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する」とは，たとえば，“<u>5</u>2<u>3</u>4<u>1</u>”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するが，“<u>54321</u>”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するとは言わない。(3), (4)においても同等の意味とする。

1

問題のページへ

(1)　$a=-1$，$b=-3$ のとき，$4^x-2^{x+1}-3=0$ より，$2^{2x}-2\cdot 2^x-3=0$

$$(2^x-3)(2^x+1)=0$$

$2^x+1>0$ から $2^x=3$ となり，$x=\log_2 3$

(2)　$4^x+a\times 2^{x+1}+b=0$ ……①に対して，$2^x=t>0$ とおくと，

$$t^2+2at+b=0 \text{………②}$$

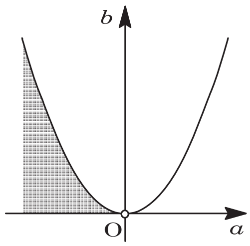
①が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，②が異なる正の実数解を 2 つもつことに等しい。

$f(t)=t^2+2at+b$ とおくと，$f(t)=(t+a)^2-a^2+b$ より，

$$t=-a>0,\ f(-a)=-a^2+b<0,\ f(0)=b>0$$

まとめると，$a<0$，$0<b<a^2$

この関係を満たす点 $(a,\ b)$ を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



[解 説]

指数関数と 2 次関数を題材とした穏やかな基本題です。

2

問題のページへ

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x+c=0$ ……(＊)より，$2\sin(x+60°)+c=0$

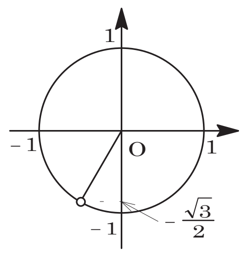
$$\sin(x+60°)=-\frac{c}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$c=\sqrt{3}$ のとき，①は $\sin(x+60°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで，$-180°<x<180°$ から，$-120°<x+60°<240°$ となり，

$$x+60°=-60°,\ x=-120°$$

(2)　①が $-180°<x<180°$ で異なる 2 つの解をもつ条件は，



$-120°<x+60°<240°$ より，$\left|-\dfrac{c}{2}\right|<1$ かつ $-\dfrac{c}{2}\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，すなわち $-2<c<2$ かつ $c\neq\sqrt{3}$ となる。

よって，$-2<c<\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<c<2$ である。

(3)　半角の公式より，$\tan^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ なので，$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$t^2(1+\cos x)=1-\cos x$ となり，

$$(1+t^2)\cos x=1-t^2,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

また, 2 倍角の公式より，$\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ となるので,

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

(＊)に代入して，$\dfrac{2t}{1+t^2}+\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+c=0$，$2t+\sqrt{3}(1-t^2)+c(1+t^2)=0$

$$(c-\sqrt{3})t^2+2t+c+\sqrt{3}=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(4)　(＊)が $x=\alpha,\ \beta$ を解にもつとき，②の解は $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\beta}{2}$ となり，$c\neq\sqrt{3}$ より，解と係数の関係から，

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=\frac{-2}{c-\sqrt{3}},\ \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{c+\sqrt{3}}{c-\sqrt{3}}$$

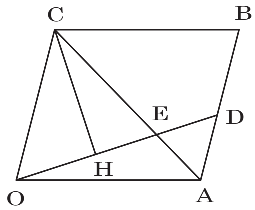
よって，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{\frac{-2}{c-\sqrt{3}}}{1-\frac{c+\sqrt{3}}{c-\sqrt{3}}}=\dfrac{-2}{c-\sqrt{3}-c-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

［解 説］

三角関数の公式を確認する問題です。

3

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$なので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

(2)　OC // AB より，△OEC ∽ △DEA なので，

$$\mathrm{CE}:\mathrm{AE}=\mathrm{OC}:\mathrm{DA}=(m+n):m$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2m+n}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 0)+(a,\ b)=(1+a,\ b)$となり，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{2}{3}(1,\ 0)+\frac{1}{3}(1+a,\ b)=\frac{1}{3}(3+a,\ b)$$

よって，直線 OD の方程式は，$y=\dfrac{b}{3+a}x$ ………①

(4)　点 C を通り，直線 OD に垂直な直線は，$y-b=-\dfrac{3+a}{b}(x-a)$ ………②

①②の交点が H より，$\dfrac{b}{3+a}x-b=-\dfrac{3+a}{b}(x-a)$

$$b^2x-b^2(3+a)=-(3+a)^2(x-a)$$

よって，$\{b^2+(3+a)^2\}x=a(3+a)^2+b^2(3+a)$より，

$$x=\frac{a(3+a)^2+b^2(3+a)}{b^2+(3+a)^2}=\frac{(3+a)(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2}$$

①より，$y=\dfrac{b(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2}$となるので，

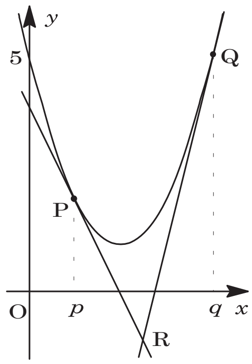
$$\mathrm{H}\left(\frac{(3+a)(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2},\ \frac{b(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2}\right)$$

［解 説］

前半が平面ベクトル，後半が図形と式の内容となっています。どちらも特別な工夫は必要ありません。

4

問題のページへ



(1)　$f(x)=x^2-4x+5$ より，$f'(x)=2x-4$ となり，

$$a=f'(p)=2p-4,\ b=f'(q)=2q-4$$

条件から，$2a+b=0$ より，$2(2p-4)+(2q-4)=0$

$$2p+q=6\ \cdots\cdots\cdots①$$

P における接線 l は，

$$y-(p^2-4p+5)=(2p-4)(x-p)$$

$$y=(2p-4)x-p^2+5\ \cdots\cdots\cdots②$$

同様にして，$m: y=(2q-4)x-q^2+5\ \cdots\cdots\cdots③$

②③の交点は，$(2p-4)x-p^2+5=(2q-4)x-q^2+5$

$$2(p-q)x=p^2-q^2,\ x=\frac{p+q}{2}$$

条件より，$\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{5}{2}$，$p+q=5\ \cdots\cdots\cdots④$

①④より，$p=1$，$q=4$

このとき，②は $y=-2x+4$ となり，$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\ r\right)$ を通ることより，$r=-5+4=-1$

(2)　②より $l: y=-2x+4$，③より $m: y=4x-11$

(3)　$S=\displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}}\{(x^2-4x+5)-(-2x+4)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\{(x^2-4x+5)-(4x-11)\}dx$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-4)^3\Big]_{\frac{5}{2}}^{4}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{9}{4}$$

［解 説］

センター試験でも過去に類題が出た頻出問題の 1 つです。交点 R の x 座標は，接点 P, Q の x 座標の相加平均になっています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 偶数となる並べ方は，一の位が 2 または 4 より，$2\times 4!=48$ 通りある。
奇数となる並べ方は，一の位が 1, 3, 5 のいずれかより，$3\times 4!=72$ 通りある。

(2) まず, 5 けたの数は，全部で $5!$ 通りできる。
54321 とちょうど 3 つの位で一致するのは，一致する位の選び方が ${}_5C_3=10$ 通りで，一致しない 2 つの位の並べ方が 1 通りずつより，$10\times 1=10$ 通りとなる。
よって，このときの確率は，$\dfrac{10}{5!}=\dfrac{1}{12}$ である。

(3) 54321 とちょうど 2 つの位で一致するのは，一致する位の選び方が ${}_5C_2=10$ 通りある。また，一致しない 3 つの位の並べ方は，たとえば 321 のときは 132 または 213 と 2 通りあり，他の場合も同様に考えて，2 つの位が一致する並べ方は，$10\times 2=20$ 通りとなる。
よって，このときの確率は，$\dfrac{20}{5!}=\dfrac{1}{6}$ である。

(4) 5 つの位で一致する確率は，明らかに $\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}$ である。
よって, (2), (3)より，題意の期待金額は,

$$60000\times\frac{1}{120}+6000\times\frac{1}{12}+600\times\frac{1}{6}=1100\ \text{（円）}$$

［解 説］
題意を理解すれば，考え方や計算は容易です。ていねいなことに，問題に補足説明もついています。