$\boxed{1}$

解答解説のページへ

複素数平面上で不等式$2|z-2| \leqq |z-5| \leqq |z+1|$を満たす点$z$が描く図形を$D$とする。

(1) Dを図示せよ。

(2) 点zがD上を動くものとする。$\arg z=\theta$とするとき，$\tan\theta$の値のとりうる範囲を求めよ。

(3) Dの面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 点$(3,\ 3)$における円$x^2+y^2-4x-2y=0$の接線の方程式を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y,\quad \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$$

(3) a を正の数とする。点$(x,\ y)$が(2)で求めた領域を動くとき，$ax+y$の最大値が4になるようにaの値を定めよ。

3

解答解説のページへ

$X,\ Y$ はともに実数を成分とする 2 次の正方行列で,

$$2X-Y=E\ ,\quad XY=O$$

を満たしているものとする。ただし, $E,\ O$ は, それぞれ 2 次の単位行列, 零行列とする。$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) X が逆行列をもつとき, $X,\ Y$ を求めよ。

(2) X が逆行列をもたないとき, $(2a+2d-1)X$ を求めよ。

(3) X は零行列でなく, かつ X が逆行列をもたないとき, a と d を $b,\ c$ で表せ。ただし, $b,\ c$ は $bc \leqq \dfrac{1}{16}$ を満たすものとする。

4

解答解説のページへ

A を正の定数，θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす実数とし，2 つの曲線

$$y = A\cos x\,,\quad y = \sin(x-\theta)\quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積を S とする。また，この 2 つの曲線の交点の x 座標を a，$b\,(a<b)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos b\sin(a-\theta) = \cos a\sin(b-\theta)$ が成り立っているとき，$\cos\theta\sin(b-a) = 0$ を示せ。

(2)　$b-a=\pi$ を示せ。

(3)　S を A，a，θ を用いて表せ。

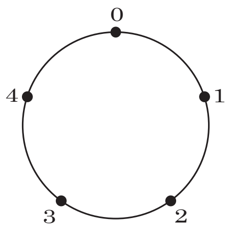
(4)　S^2 を A，θ を用いて表せ。

(5)　S を最大にする θ の値およびそのときの S の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

円周を 5 等分して図のように 0 から 4 の目盛りをふる。初めに点 P を目盛り 0 の位置に置く。硬貨を 1 回投げるごとに, 表が出れば, 点 P を右回りに 2 目盛り動かし, 裏が出れば, 点 P を左回りに 1 目盛り動かすという操作をくり返し行う。硬貨を n 回投げた後, 点 P が目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す。



(1) $p_2(1)$, $p_3(2)$, $p_3(3)$ を求めよ。

(2) 硬貨を 4 回投げて, 点 P が初めて目盛り 2 の位置で止まる確率を求めよ。

(3) $p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}\{p_n(3)+p_n(1)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(4) z を $z^5=1$ を満たす複素数とする。すべての自然数 n に対して,

$\displaystyle\sum_{i=0}^{4} p_n(i)z^i=\frac{(z^2+z^{-1})^n}{2^n}$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

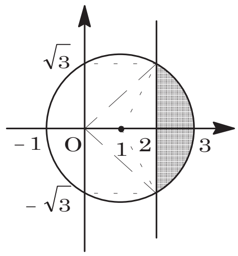
(1) 条件より，$2|z-2|\leqq|z-5|$………①，$|z-5|\leqq|z+1|$………②

①より，$4|z-2|^2\leqq|z-5|^2$，$4(z-2)(\overline{z}-2)\leqq(z-5)(\overline{z}-5)$，$z\overline{z}-z-\overline{z}\leqq 3$

$(z-1)(\overline{z}-1)\leqq 4$，$|z-1|^2\leqq 4$，$|z-1|\leqq 2$

よって，点zは，点1を中心とする半径2の円の内部または周上にある。

②より，点 z は，点 5 と点-1を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 2 を通り実軸に垂直な直線を境界とし，点 5 を含む領域にある。



以上より，①②を満たす図形 D は右図の網点部である。ただし，境界を含む。

(2) ①と②の境界線の交点は$2\pm\sqrt{3}i$である。

そこで，$\arg z=\theta$ とするとき，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

(3) Dの面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

［解 説］

①の境界線はアポロニウスの円ですが，その知識は用いなくても，普通に計算していけば，結論が導けます。基本的な1題です。

2

問題のページへ

(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ より，$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

点$(3,\ 3)$における接線の方程式は，

$$(3-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5,\quad x+2y=9$$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)\geqq\log_{\frac{1}{2}}y$ ……①，$\log_2(x^2+y^2-4x-2y+5)\leqq\log_2 5$ ……②

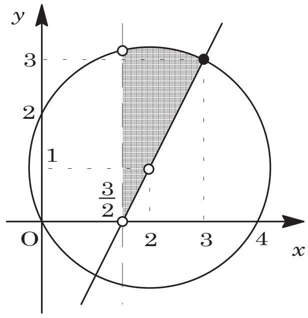
①より，$x>\dfrac{3}{2}$ かつ $y>0$ として，$2x-3\leqq y$

②より，$x^2+y^2-4x-2y+5>0$ として，$x^2+y^2-4x-2y+5\leqq 5$ から，

$$(x,\ y)\neq(2,\ 1),\ (x-2)^2+(y-1)^2\leqq 5$$

以上をまとめて，連立不等式の表す領域を図示すると，右図の網点部のようになる。

なお，実線の境界線と黒丸の点は含み，破線の境界線と白丸の点は含まない。



(3)　$ax+y=k$ とおくと，$y=-ax+k$ となり，(1)から，点$(3,\ 3)$における接線の傾きが$-\dfrac{1}{2}$より，

(i)　$-a\leqq-\dfrac{1}{2}\left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$のとき

k は点$(3,\ 3)$で最大となり，最大値は $k=3a+3$

条件より $3a+3=4$ とすると，$a=\dfrac{1}{3}$ となるが，$a\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たさない。

(ii)　$-a>-\dfrac{1}{2}\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$のとき

直線 $ax+y-k=0$ と円$(x-2)^2+(y-1)^2=5$ が接する場合に k は最大となり，

$$\frac{|2a+1-k|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5},\quad |2a+1-k|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}$$

条件より，このとき $k=4$ なので，$|2a-3|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}$

$$(2a-3)^2=5(a^2+1),\quad a^2+12a-4=0$$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ より，$a=-6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より，$a=-6+2\sqrt{10}$

［解 説］

対数不等式を用いて条件づけられた最大・最小問題で，昨年の文系第 5 問と同じ題材です。しかし，解き終えても，あまり疲労を感じません。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$2X-Y=E$ ………①，$XY=O$ ………②

X^{-1} が存在するとき，②より $X^{-1}XY=X^{-1}O$ となり，$Y=O$

①に代入して，$2X=E$，$X=\dfrac{1}{2}E$

(2)　①より，$Y=2X-E$

②に代入して，$X(2X-E)=O$，$2X^2-X=O$ ………③

さて，$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，X^{-1} が存在しないことより $ad-bc=0$ ………④

すると，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$X^2-(a+d)X=O \text{ ………⑤}$$

③－⑤×2 より，$(2a+2d-1)X=O$

(3)　$X\neq O$ より, (2)から $2a+2d-1=0$ ………⑥

④より $ad=bc$，⑥より $a+d=\dfrac{1}{2}$ なので，解と係数の関係から，a，d は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{1}{2}x+bc=0$ の解である。

$$2x^2-x+2bc=0,\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1-16bc}}{4}\quad \left(bc\leqq\frac{1}{16}\right)$$

よって，$a=\dfrac{1\pm\sqrt{1-16bc}}{4}$，$d=\dfrac{1\mp\sqrt{1-16bc}}{4}$ （複号同順）

［解　説］

行列の基本問題です。誘導もていねいです。

4

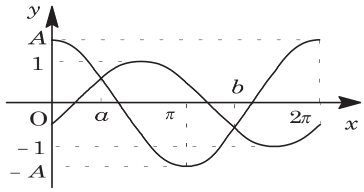
問題のページへ

(1)　$\cos b\sin(a-\theta)=\cos a\sin(b-\theta)$ ……①が成り立っているとき，

$$\frac{1}{2}\{\sin(b+a-\theta)-\sin(b-a+\theta)\}=\frac{1}{2}\{\sin(a+b-\theta)-\sin(a-b+\theta)\}$$

$$\sin(b-a+\theta)-\sin(a-b+\theta)=0,\ 2\cos\frac{2\theta}{2}\sin\frac{2b-2a}{2}=0$$

よって，$\cos\theta\sin(b-a)=0$ ………②



(2)　$y=A\cos x$ ……③と $y=\sin(x-\theta)$ ……④の交点が $x=a,\ b$ より，

$$A\cos a=\sin(a-\theta),\ A\cos b=\sin(b-\theta)$$

すると，①が成立しているので，②より，

(i)　$\cos\theta=0$ のとき　$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\frac{\pi}{2}$ となり，④は $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

③との交点は，$A\cos x=-\cos x$，$(A+1)\cos x=0$

$A>0$，$0\leqq x\leqq 2\pi$ より，$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$ となり，$b-a=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$

(ii)　$\cos\theta\neq 0$ のとき　②より，$\sin(b-a)=0$

$A>0$ より，$0<a<b<2\pi$ から，$0<b-a<2\pi$ となり，$b-a=\pi$

(3)　$S=\int_a^b\{\sin(x-\theta)-A\cos x\}dx=\Big[-\cos(x-\theta)-A\sin x\Big]_a^b$

$=-\cos(b-\theta)+\cos(a-\theta)-A\sin b+A\sin a$

(2)より，$b=\pi+a$ なので，

$$\begin{aligned}S&=-\cos(\pi+a-\theta)+\cos(a-\theta)-A\sin(\pi+a)+A\sin a\\&=\cos(a-\theta)+\cos(a-\theta)+A\sin a+A\sin a\\&=2\cos(a-\theta)+2A\sin a\end{aligned}$$

(4)　(3)より，$S=2(\cos a\cos\theta+\sin a\sin\theta)+2A\sin a$ となり，

$$2\cos\theta\cos a+2(\sin\theta+A)\sin a=S\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで, (2)より $A\cos a=\sin(a-\theta)$ なので，

$$A\cos a=\sin a\cos\theta-\cos a\sin\theta,\ (\sin\theta+A)\cos a-\cos\theta\sin a=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$\begin{pmatrix}2\cos\theta & 2(\sin\theta+A)\\ \sin\theta+A & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S\\ 0\end{pmatrix}$

$\Delta=-2\cos^2\theta-2(\sin\theta+A)^2$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$, $A>0$ より，$\Delta<0$ となり，

$$\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-\cos\theta & -2(\sin\theta+A)\\ -(\sin\theta+A) & 2\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-S\cos\theta\\ -S(\sin\theta+A)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{S}{2\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta+A\end{pmatrix}$$

そこで，$\cos^2 a+\sin^2 a=1$ より，

$$\frac{S^2\cos^2\theta}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}^2}+\frac{S^2(\sin\theta+A)^2}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}^2}=1$$

まとめると，$\dfrac{S^2}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}}=1$ となり，

$$S^2=4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}=4(1+2A\sin\theta+A^2)$$

(5)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ なので, (4)より，S^2 は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大になり，このとき,

$$S^2=4(1+2A+A^2)=4(1+A)^2$$

よって, S は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\sqrt{4(1+A)^2}=2(1+A)$ をとる。

［解 説］

(4)は a を消去する問題ですが，ちょうど「もぐらたたき」のように，$\sin a$ を消去すると $\cos a$ が現れ，$\cos a$ を消去すると $\sin a$ が現れるという状況になりました。そこで，迂遠な方法ですが，$\cos^2 a+\sin^2 a=1$ に代入して消すという基本で解いてみました。時間は，かなりかかりました。

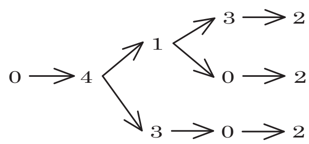
5

問題のページへ

(1)　硬貨を 2 回投げたとき，点 P が目盛り 1 の位置にあるのは，表が 1 回，裏が 1 回出る場合より，$p_2(1) = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ である。

硬貨を 3 回投げたとき，点 P が目盛り 2 の位置にあるのは，3 回とも裏が出る場合であり，また点 P が目盛り 3 の位置にあるのは，表が 2 回，裏が 1 回出る場合なので，$p_3(2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$，$p_3(3) = {}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$ である。

(2)　4 回目に初めて目盛り 2 の位置で止まるのは，1 回目に裏が出て，右図のように点 P の位置が変化する場合より，その確率は，$3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{3}{16}$ である。



(3)　$n+1$ 回目に 0 の位置にあるのは，n 回目には 3 の位置で硬貨を投げて表が出る場合か，n 回目には 1 の位置で硬貨を投げて裏が出る場合のいずれかより，

$$p_{n+1}(0) = p_n(3) \times \frac{1}{2} + p_n(1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\{p_n(3) + p_n(1)\} \cdots\cdots\cdots ①$$

(4)　①より，$p_{n+1}(1)z = \dfrac{z}{2}\{p_n(4) + p_n(2)\}$，$p_{n+1}(2)z^2 = \dfrac{z^2}{2}\{p_n(0) + p_n(3)\}$

$$p_{n+1}(3)z^3 = \frac{z^3}{2}\{p_n(1) + p_n(4)\},\quad p_{n+1}(4)z^4 = \frac{z^4}{2}\{p_n(2) + p_n(0)\}$$

①と合わせて，両辺の和をとると，

$$p_{n+1}(0) + p_{n+1}(1)z + p_{n+1}(2)z^2 + p_{n+1}(3)z^3 + p_{n+1}(4)z^4$$
$$= \frac{z^2 + z^4}{2}p_n(0) + \frac{1 + z^3}{2}p_n(1) + \frac{z + z^4}{2}p_n(2) + \frac{1 + z^2}{2}p_n(3) + \frac{z + z^3}{2}p_n(4)$$

さて，$z^5 = 1$ より，$z^4 = z^{-1}$，$z^2 = z^{-3}$ となり，

$$\frac{z^2 + z^4}{2} = \frac{z^2 + z^{-1}}{2},\quad \frac{1 + z^3}{2} = \frac{z(z^{-1} + z^2)}{2},\quad \frac{z + z^4}{2} = \frac{z^2(z^{-1} + z^2)}{2}$$
$$\frac{1 + z^2}{2} = \frac{z^3(z^2 + z^{-1})}{2},\quad \frac{z + z^3}{2} = \frac{z^4(z^2 + z^{-1})}{2}$$

よって，$a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} p_n(i)z^i$ とおくと，$a_{n+1} = \dfrac{z^2 + z^{-1}}{2}a_n \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，$a_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} p_1(i)z^i = \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{2}z^4 = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ となるので，②より，

$$\sum_{i=0}^{4} p_n(i)z^i = a_n = a_1\left(\frac{z^2 + z^{-1}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{z^2 + z^{-1}}{2}\right)^n$$

［解 説］

確率と複素数という一見，畑違いな分野がうまく融合された問題です。