1　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$P(x)$は，x^3の係数が 1 であるような 3 次式とする。$P(x)$を$(x+1)^2$で割ったときの余りは$x+1$であり，$(x-1)^2$で割ったときの余りは$x+c$である。ただし，cは定数である。このとき, cの値と$P(x)$を求めよ。

(2)　正の実数x, yが$xy=100$を満たすとき，$(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$の最小値と，そのときの$x$と$y$の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

2つの円

$$(*)\quad x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\frac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\frac{17}{16}=0$$

$$(**)\quad x^2+y^2=\frac{9}{16}$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$0^\circ<\theta<180^\circ$ とする。

(1) 円(∗)の半径と中心の座標をθを用いて表せ。

(2) 円(∗)と円(∗∗)が共有点をもたないようなθの値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

三角形 OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=4$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) 点 P から辺 OA に垂線を下ろし，OA との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\vec{a}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3) 線分 PE の長さを求めよ。

4

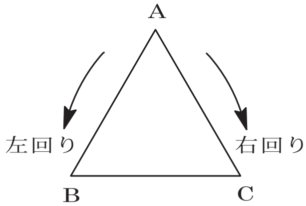
解答解説のページへ

1 枚のコインを 1 回投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

表が出たとき，左回りで隣りの頂点に移し，

裏が出たとき，右回りで隣りの頂点に移す

という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。次の問いに答えよ。



(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_2 を求めよ。

(2)　この試行を 3 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_3 を求めよ。

(3)　この試行を 4 回繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_4 を求めよ。

(4)　この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

各実数 t に対して，方程式 $y=(2t-3)x-t^2$ で表される直線 L_t を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 L_t と L_s が直交するとき，L_t と L_s の交点の y 座標は，t と s によらない定数になることを示せ。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ にすべての直線 L_t が接するとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(3) (2)で求めた放物線と 2 つの直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積は，t によらない定数になることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　x^3の係数が 1 である 3 次式$P(x)$を$(x+1)^2$で割った商は，a を定数として，$x+a$とおくことができ，

$$P(x)=(x+1)^2(x+a)+x+1=x^3+(a+2)x^2+(2a+2)x+a+1$$

このとき，$P(x)$を$(x-1)^2$で割ると，

$$P(x)=(x-1)^2(x+a+4)+(4a+9)x-3$$

条件より，この余りが$x+c$なので，

$$4a+9=1\,,\ c=-3$$

$a=-2$から，$P(x)=x^3-2x-1$

(2)　$xy=100$から，$\log_{10}xy=\log_{10}100$，$\log_{10}x+\log_{10}y=2$となり，

$$\begin{aligned}P&=(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3\\&=(\log_{10}x+\log_{10}y)^3-3\log_{10}x\log_{10}y(\log_{10}x+\log_{10}y)\\&=8-6\log_{10}x\log_{10}y\end{aligned}$$

ここで，$\log_{10}x\log_{10}y=\log_{10}x\log_{10}\dfrac{100}{x}=\log_{10}x(2-\log_{10}x)$

$$=-(\log_{10}x)^2+2\log_{10}x=-(\log_{10}x-1)^2+1\leqq 1$$

なお，等号は$\log_{10}x=1\ (x=10)$のとき成立する。

よって，$P\geqq 8-6\times 1=2$となり，Pの最小値は 2 である。

また，このとき，$x=10$，$y=\dfrac{100}{10}=10$である。

［解 説］

独立した単問が 2 題で構成されています。いままで見られなかった形式です。

2

問題のページへ

(1)　$x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\dfrac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}=0$ ………(＊)より,

$$(x+\sqrt{2}\sin\theta)^2+\left(y-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2=\sin^2\theta$$

$0°<\theta<180°$ から $\sin\theta>0$ なので, (＊)は半径 $\sin\theta$ ，中心 $\left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \dfrac{\sqrt{17}}{4}\right)$ の円である。

(2)　まず，円(＊)と円(＊＊)の中心間距離は $\sqrt{2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}}$ であり，円(＊)の半径は $\sin\theta$ ，円(＊＊)の半径は $\dfrac{3}{4}$ である。

ここで, 2 円が共有点をもたないのは，離れているときか，または一方が他方に含まれるときである。

(i)　円(＊)と円(＊＊)が離れているとき

$\sqrt{2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}}>\sin\theta+\dfrac{3}{4}$ より，$2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}>\left(\sin\theta+\dfrac{3}{4}\right)^2$

$$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1>0,\ (2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)>0$$

よって，$0°<\theta<180°$ から $\sin\theta>0$ なので，$0<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$ となり,

$$0°<\theta<30°,\ 150°<\theta<180°$$

(ii)　円(＊)と円(＊＊)の一方が他方に含まれるとき

$\sqrt{2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}}<\left|\sin\theta-\dfrac{3}{4}\right|$ より，$2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}<\left(\sin\theta-\dfrac{3}{4}\right)^2$

$$2\sin^2\theta+3\sin\theta+1<0$$

$\sin\theta>0$ なので，成立しない。

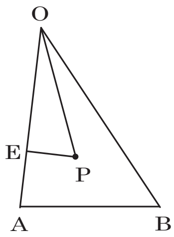
(i)(ii)より，$0°<\theta<30°$ ，$150°<\theta<180°$

［解　説］

2 円の位置関係の問題です。この問題では，最後の答えには影響しませんが，(ii)の場合を見落とさないことがポイントです。

3

問題のページへ



(1)　余弦定理より，$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{25+36-16}{2} = \frac{45}{2}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(k - \frac{2}{5}\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\vec{a} = 0$ から，

$$\left(k - \frac{2}{5}\right)|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

(1)より，$25\left(k - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{45}{2} = 0$ となり，

$$5k - \frac{7}{2} = 0,\quad k = \frac{7}{10}$$

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \frac{3}{10}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PE}}|^2 = \frac{9}{100}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{5}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}$$

よって，$\mathrm{PE} = |\overrightarrow{\mathrm{PE}}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$

［解 説］

平面ベクトルの内積について，基本を確認する問題です。

4

問題のページへ

(1)　駒が A→B→A または A→C→A と移動する場合より,

$$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(2)　駒が A→B→C→A または A→C→B→A と移動する場合より,

$$P_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

(3)　駒が A→B→C→B→A または A→C→B→C→A と移動する場合より,

$$Q_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

(4)　駒が A→B→C→B→C→……と B と C を移動し n 回目に A にもどる場合か, または A→C→B→C→B→……と C と B を移動し n 回目に A にもどる場合より,

$$Q_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この値は, $n=2$ のときも適する。

［解 説］

(4)の設問が本問の目的とすると, $Q_2=P_2$, $Q_3=P_3$ というのが, (1)と(2)の役割でしょう。

5

問題のページへ

(1)　$L_t : y=(2t-3)x-t^2$ ……①，$L_s : y=(2s-3)x-s^2$ ……②に対して，L_t と L_s が直交するとき，

$$(2t-3)(2s-3)=-1 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

このとき，①②の交点は，$(2t-3)x-t^2=(2s-3)x-s^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2$$

$t\neq s$ より，$x=\dfrac{t+s}{2}$ となり，交点の y 座標は，

$$y=(2t-3)\cdot\frac{t+s}{2}-t^2=ts-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}s=\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}$$

③から，$\left(t-\dfrac{3}{2}\right)\left(s-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$ なので，$y=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{5}{2}$ である。

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ ……④と直線①の共有点は，

$$ax^2+bx+c=(2t-3)x-t^2,\quad ax^2+(b+3-2t)x+c+t^2=0$$

④と①が接することより，

$$D=(b+3-2t)^2-4a(c+t^2)=0$$

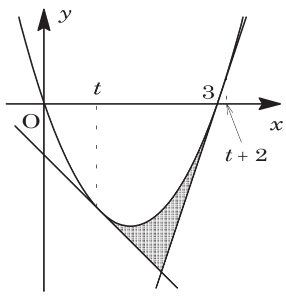
$$(4-4a)t^2-4(b+3)t+(b+3)^2-4ac=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤がすべての t で成立することより，

$$4-4a=0,\ b+3=0,\ (b+3)^2-4ac=0$$

よって，$a=1$，$b=-3$，$c=0$

(3)　(2)より，放物線の方程式は，$y=x^2-3x$ ………⑥



直線 L_t と⑥との接点は，$x^2-3x=(2t-3)x-t^2$

$$x^2-2tx+t^2=0,\quad x=t$$

同様にして，直線 L_{t+2} と⑥との接点は，$x=t+2$ となり，さらに L_t，L_{t+2} の交点は，(1)より，

$$x=\frac{t+(t+2)}{2}=t+1$$

以上より，放物線⑥と 2 直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_t^{t+1}(x-t)^2dx+\int_{t+1}^{t+2}\{x-(t+2)\}^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-t)^3\Big]_t^{t+1}+\frac{1}{3}\Big[(x-t-2)^3\Big]_{t+1}^{t+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

［解 説］

放物線と面積についての有名頻出問題です。