1　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{7}$ の小数部分を p とするとき，$\dfrac{3}{p}-p$ は整数であることを示し，その整数を求めよ。

(2)　$k>0$ を定数とするとき，x についての方程式 $\log_3 x = kx$ が 2 つの実数解 a と $3a$ をもつとする。このとき，k の値と a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a_1=1$ と $a_{n+1}=3a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) p と q を定数とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n+pn+q$ によって定めると，$\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする。このとき，定数 p と q の値を求めよ。

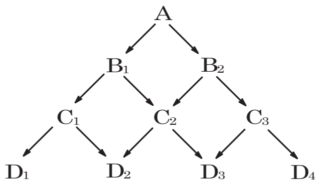
(2) a_n を n の式で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ。

3

解答解説のページへ

図の一番上の点 A から玉を落とす。玉はそれぞれの分岐点において，確率 p で左下に，確率$1-p$で右下に向かうものとする。また，この図のB_1，B_2の段を 1 段目，C_1，C_2，C_3の段を 2 段目として段数を数えるものとする。$0<p<1$ として，次の問いに答えよ。



(1)　2 段目の点C_1，C_2，C_3に対して，玉がその点に落ちてくる確率を求めよ。

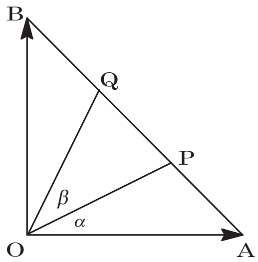
(2)　2 段目の点のうち，点C_2に玉が落ちてくる確率が，他の点C_1，C_3の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，p の値の範囲を求めよ。

(3)　3 段目の点のうち，点D_3に玉が落ちてくる確率が，他の点D_1，D_2，D_4の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，p の値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上で，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は直交し，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする。また，$\angle AOP=\alpha$，$\angle POQ=\beta$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<30^\circ<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に，点 R を $\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ となるようにとる。このとき，$|\overrightarrow{OR}|^2$ を k の式で表せ。

(4)　(3)の R に対して，$\angle POR=\alpha$ となるとき，k の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

直線 $y=-2x+m$ が，放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax$ $(a>2)$ に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接している。

連立不等式

$$0 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+ax,\ \ x \leqq p$$

の表す領域の面積を S_1 とする。また，連立不等式

$$-\frac{1}{2}x^2+ax \leqq y \leqq -2x+m,\ \ 0 \leqq x \leqq p$$

の表す領域の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a, m, q を p の式で表せ。

(2)　S_1 と S_2 を p の式で表せ。

(3)　$a>2$ のとき，$\frac{1}{2}<\frac{S_2}{S_1}<2$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) $2<\sqrt{7}<3$ より，$\sqrt{7}$ の小数部分 p は，$p=\sqrt{7}-2$ となるので，

$$\frac{3}{p}-p=\frac{3}{\sqrt{7}-2}-(\sqrt{7}-2)=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}-\sqrt{7}+2=4$$

(2) 方程式 $\log_3 x=kx$ の解が $x=a,\ 3a$ なので，$a>0$ において，

$\log_3 a=ka$ ………①，$\log_3 3a=3ka$ ………②

②より，$\log_3 3+\log_3 a=3ka$，$1+\log_3 a=3ka$

①を代入して，$1+\log_3 a=3\log_3 a$ から，

$\log_3 a=\dfrac{1}{2}$，$a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

①より，$\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}k$，$k=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

［解 説］

昨年と同じく，単問 2 題の構成です。センター対策に際して，まず行うような基本確認問題です。

2

問題のページへ

(1) 数列$\{b_n\}$は公比 3 の等比数列なので，$b_{n+1}=3b_n$ ………①

ここで，$b_n=a_n+pn+q$なので，①に代入して，

$$a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_n+pn+q),\ a_{n+1}=3a_n+2pn+2q-p\ \cdots\cdots\cdots②$$

条件より，$a_{n+1}=3a_n-n$ ………③

②③より，$2p=-1$，$2q-p=0$となり，

$$p=-\frac{1}{2},\ q=-\frac{1}{4}$$

(2) $b_1=a_1+p+q=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$となり，①から，

$$b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot 3^{n-1}$$

よって，$a_n=b_n-pn-q=\dfrac{1}{4}\cdot 3^{n-1}+\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{4}$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\cdot 3^{k-1}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3^n-1}{3-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{4}n$$

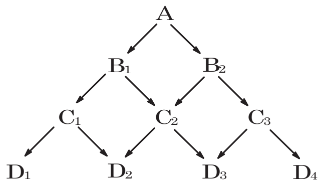
$$=\frac{1}{8}\cdot 3^n+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{8}$$

［解 説］

誘導つきで漸化式を解く問題です。誘導の意味は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。なお，1998 年に，となりの岡山大・文系で同じタイプの漸化式が出題されています。ただ，誘導はありませんでしたが。

3

問題のページへ



(1)　玉が点C_1に落ちてくるルートは，$A\to B_1\to C_1$より，その確率はp^2である。

点C_2に落ちてくるルートは，$A\to B_1\to C_2$または$A\to B_2\to C_2$より，その確率は，

$$p(1-p)+(1-p)p=2p(1-p)$$

点C_3に落ちてくるルートは，$A\to B_2\to C_3$より，その確率は$(1-p)^2$である。

(2)　C_2に落ちてくる確率が，C_1，C_3の各点に落ちてくる確率より大きくなるのは，

$$2p(1-p)>p^2\cdots\cdots\cdots①,\ 2p(1-p)>(1-p)^2\cdots\cdots\cdots②$$

$0<p<1$なので，①より$2(1-p)>p$，②より$2p>1-p$となり，

$$\frac{1}{3}<p<\frac{2}{3}$$

(3)　(1)と同様に考えて，点D_kに落ちてくる確率を$P(k)$と表すと，

$$P(1)=p^3,\ P(2)=3p^2(1-p),\ P(3)=3p(1-p)^2,\ P(4)=(1-p)^3$$

条件より，$P(3)>P(1)$，$P(3)>P(2)$，$P(3)>P(4)$なので，

$$3p(1-p)^2>p^3\cdots\cdots\cdots③,\ 3p(1-p)^2>3p^2(1-p)\cdots\cdots\cdots④$$

$$3p(1-p)^2>(1-p)^3\cdots\cdots\cdots⑤$$

$0<p<1$なので，③より$3(1-p)^2>p^2$，$2p^2-6p+3>0$

$$p<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}<p$$

また，④から$1-p>p$となり$p<\frac{1}{2}$，⑤から$3p>1-p$となり$p>\frac{1}{4}$である。

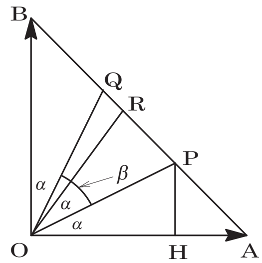
以上まとめて，$\frac{1}{4}<p<\frac{1}{2}$

［解　説］

確率の基本問題です。ミスをしないように計算を進めるだけです。

4

問題のページへ



(1)　$OA = OB = 1$，$\angle AOB = 90°$ から，$AB = \sqrt{2}$ となる。

ここで, P から OA に下ろした垂線の足を H とすると,

$$PH = AH = AP\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

よって，$OP = \sqrt{OH^2 + PH^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ から，$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\cos\beta = \cos(90° - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4 > \sqrt{15}$ より $\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3} > 8$ より $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5}$ となるので,

$$\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5},\ \cos\alpha > \cos 30° > \cos\beta$$

$f(x) = \cos x$ は $0° < x < 90°$ で単調減少するので，$\alpha < 30° < \beta$ となる。

(3)　条件より，$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ なので,

$$|\overrightarrow{OR}|^2 = k^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + (1-k)^2|\overrightarrow{OB}|^2$$

ここで，$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ なので,

$$|\overrightarrow{OR}|^2 = k^2 + (1-k)^2 = 2k^2 - 2k + 1$$

(4)　$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ で，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OR}|\cos\alpha$ から,

$$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left\{k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}\right\} = \frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{2k^2 - 2k + 1}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{3}k + \frac{1}{3}(1-k) = \frac{2}{3}\sqrt{2k^2 - 2k + 1},\ k + 1 = 2\sqrt{2k^2 - 2k + 1}$$

両辺を 2 乗して，$7k^2 - 10k + 3 = 0$，$(7k-3)(k-1) = 0$

すると，$\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$ から，$k = \frac{3}{7}$ である。

［解 説］

ベクトルの平面図形への応用ですが, いろいろな解法が考えられます。採用した解法によっては, 計算の海に溺れてしまいます。うっかりして気付きませんでしたが, O を原点とする直交座標を導入する方が, 計算量は少なくてすみそうです。

5

問題のページへ

(1)　まず，点P$(p,\ q)$は，放物線$y=-\frac{1}{2}x^2+ax$上にあるので，

$$q=-\frac{1}{2}p^2+ap\cdots\cdots\cdots①$$

$y=-\frac{1}{2}x^2+ax$に対して，$y'=-x+a$より，P$(p,\ q)$における接線の方程式は，

$$y-q=(-p+a)(x-p),\ \ y=(-p+a)x+p^2-ap+q$$

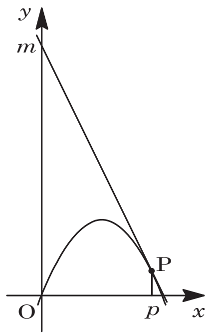
この式が$y=-2x+m$と一致するので，

$$-p+a=-2\cdots\cdots\cdots②,\ \ p^2-ap+q=m\cdots\cdots\cdots③$$

②より$a=p-2$となり，①に代入して，

$$q=-\frac{1}{2}p^2+(p-2)p=\frac{1}{2}p^2-2p$$

③に代入すると，$m=p^2-(p-2)p+\frac{1}{2}p^2-2p=\frac{1}{2}p^2$



(2)　(1)から，$y=-\frac{1}{2}x^2+(p-2)x$上の点Pにおける接線は，$y=-2x+\frac{1}{2}p^2$より，

$$S_1=\int_0^p\left\{-\frac{1}{2}x^2+(p-2)x\right\}dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{p-2}{2}x^2\right]_0^p$$

$$=-\frac{1}{6}p^3+\frac{p-2}{2}p^2=\frac{1}{3}p^3-p^2$$

$$S_2=\int_0^p\left\{-2x+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}x^2-(p-2)x\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^p(x-p)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-p)^3}{3}\right]_0^p=\frac{1}{6}p^3$$

(3)　(1)より，$a>2$のとき$p>4$となり，(2)から，

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{6}p^3}{\frac{1}{3}p^3-p^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p-3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{p-3}\right)$$

すると，$0<\frac{3}{p-3}<3$から，$\frac{1}{2}<\frac{S_2}{S_1}<2$となる。

［解 説］

放物線の接線と面積が絡んだ数Ⅱの典型頻出問題です。ただ，(3)の普通の解法は上に記したとおりでしょうが，分子を定数化する変形は，現行の課程では数Ⅲということになっています。