1

解答解説のページへ

3×3 行列 A と E を

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　A^2，A^3 を求めよ。

(2)　$(xA-E)^3=xA-E$ を満たす実数 x のうち，正のものをすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた x のうち最小のものを x_0 とする。自然数 n に対して，$(x_0A-E)^n=p_nA+q_nE$ を満たす実数 p_n と q_n を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a_1=2$，$a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ。

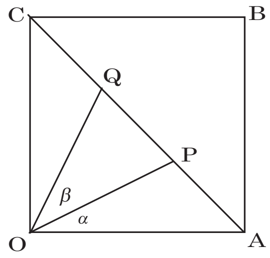
(3) a_n を n の式で表せ。

(4) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ。

3

解答解説のページへ

正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。

4

解答解説のページへ

赤い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている。同様に，白い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている。ただし，$n>4$ とする。赤い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を r_1，r_2 とする。次に，白い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を w_1，w_2 とする。

座標平面上の 4 本の直線 $x=r_1$，$x=r_2$，$y=w_1$，$y=w_2$ で囲まれた四角形を A とするとき，次の問いに答えよ。

(1) A の面積が 4 である確率を求めよ。

(2) $|r_1-r_2|$ の期待値を求めよ。

(3) $n=7$ のとき，A の面積の期待値を求めよ。

5

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ。

(3)　$m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3A$ となり，

$$A^3=A^2A=3A\cdot A=3A^2=9A=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}$$

(2) A と E は積について交換可能なので,

$$(xA-E)^3=x^3A^3-3x^2A^2+3xA-E=9x^3A-9x^2A+3xA-E$$

条件より，$(xA-E)^3=xA-E$ なので，$9x^3A-9x^2A+3xA-E=xA-E$

$$(9x^3-9x^2+2x)A=O$$

$A\neq O$ から，$9x^3-9x^2+2x=0$，$x(3x-2)(3x-1)=0$

$x>0$ より，$x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$

(3) $x_0=\dfrac{1}{3}$ なので, (2)から，$\left(\dfrac{1}{3}A-E\right)^3=\dfrac{1}{3}A-E$ となり，また,

$$\left(\frac{1}{3}A-E\right)^2=\frac{1}{9}A^2-\frac{2}{3}A+E=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}A+E=-\frac{1}{3}A+E$$

これより，$(x_0A-E)^n=p_nA+q_nE$ とおくと，$p_n=-\dfrac{(-1)^n}{3}$，$q_n=(-1)^n$ と推測できる。以下，この推測の正しいことを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$p_1=\dfrac{1}{3}$，$q_1=-1$ となり成立する。

(ii) $n=k$ のとき　$\left(\dfrac{1}{3}A-E\right)^k=-\dfrac{(-1)^k}{3}A+(-1)^kE$ と仮定する。

$$\left(\frac{1}{3}A-E\right)^{k+1}=(-1)^k\left(-\frac{1}{3}A+E\right)\left(\frac{1}{3}A-E\right)=(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3}A-E\right)^2$$
$$=(-1)^{k+1}\left(-\frac{1}{3}A+E\right)=-\frac{(-1)^{k+1}}{3}A+(-1)^{k+1}E$$

(i)(ii)より, $n\geqq 1$ において，$p_n=-\dfrac{(-1)^n}{3}$，$q_n=(-1)^n$ である。

［解 説］

(3)では，$\left(\dfrac{1}{3}A-E\right)^2$ を把握するだけで, (2)から結論を導くことができます。この考え方を用い, n を偶奇に分けて記しましたが, 漸化式を立てるという手もあります。

2

問題のページへ

(1)　$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，$b_n=a_{n+1}+a_n$ より，

$$b_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)=2b_n$$

よって，数列$\{b_n\}$は公比 2 の等比数列である。

(2)　$b_1=a_2+a_1=3$ より，(1)から，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k=3\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}=3\cdot\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=1-(-2)^{n-1}$$

(3)　$n\geqq 2$ で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(a_{k+1}+a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\{(-1)^{k+1}a_{k+1}-(-1)^k a_k\}$

$$=(-1)^n a_n-(-1)^1 a_1=(-1)^n a_n+2$$

(2)の結果と合わせて，$(-1)^n a_n+2=1-(-2)^{n-1}$

$$a_n=\frac{-(-2)^{n-1}-1}{(-1)^n}=2^{n-1}+(-1)^{n-1}$$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=2^0+(-1)^0=2$ となり，このときも満たしている。

(4)　$\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2^n+(-1)^n}=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ なので，

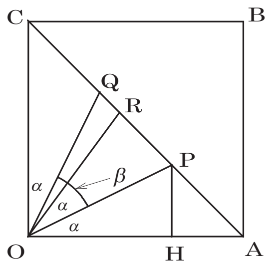
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

(3)では，無理をして，(2)を誘導として位置付けて解きましたが，パターン的に解いた方が簡明なのは言うまでもありません。

3

問題のページへ



(1)　まず，一般性を失うことなく，$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 1$ とすることができる。

ここで，P から OA に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{OH} : \mathrm{HA} = \mathrm{CP} : \mathrm{PA} = 2 : 1$ から，

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\mathrm{OH}^2 + \mathrm{PH}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

これより，$\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4 > \sqrt{15}$ より $\dfrac{2}{\sqrt{5}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3} > 8$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{4}{5}$ となるので，

$$\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5},\quad \cos\alpha > \cos\frac{\pi}{6} > \cos\beta$$

$f(x) = \cos x$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少するので，$\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ となる。

(3)　(1)から $\sin 2\alpha = \dfrac{4}{5}$ なので，$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

さて，$\angle\mathrm{ORA} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \dfrac{3}{4}\pi - 2\alpha$ から，$\triangle\mathrm{OAR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)},\quad \mathrm{AR} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3}{4}\pi\cos 2\alpha - \cos\frac{3}{4}\pi\sin 2\alpha}$$

よって，$\mathrm{AR} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}} = \dfrac{8}{7\sqrt{2}} = \dfrac{4}{7}\sqrt{2}$

これより，$\mathrm{RC} = \sqrt{2} - \dfrac{4}{7}\sqrt{2} = \dfrac{3}{7}\sqrt{2}$ となり，$\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = 4 : 3$ である。

［解 説］

ベクトルを利用した設定で，文系に類題が出ていますが，理系ではこの誘導はありません。しかし，そのために逆に発想が制約されず，本問の方が魅力ある問題となっています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　n 個の玉が入っている袋から，2 個同時に取り出す ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしいとすると，$r_1 < r_2$，$w_1 < w_2$ としても一般性を失わない。

さて, A の面積が 4 であるのは，$(r_2 - r_1,\ w_2 - w_1) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

(i)　$(r_2 - r_1,\ w_2 - w_1) = (1,\ 4)$ のとき

$r_2 = r_1 + 1$，$w_2 = w_1 + 4$ より，$1 \leqq r_1 \leqq n-1$，$1 \leqq w_1 \leqq n-4$ となり，その確率は,

$$\frac{(n-1)(n-4)}{{}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2} = \frac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2}$$

(ii)　$(r_2 - r_1,\ w_2 - w_1) = (2,\ 2)$ のとき

$r_2 = r_1 + 2$，$w_2 = w_1 + 2$ より，$1 \leqq r_1 \leqq n-2$，$1 \leqq w_1 \leqq n-2$ となり，その確率は,

$$\frac{(n-2)(n-2)}{{}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2} = \frac{4(n-2)^2}{n^2(n-1)^2}$$

(iii)　$(r_2 - r_1,\ w_2 - w_1) = (4,\ 1)$ のとき

(i)と同様にして，その確率は，$\dfrac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2}$ である。

(i)(ii)(iii)より，$\dfrac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2} + \dfrac{4(n-2)^2}{n^2(n-1)^2} + \dfrac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2} = \dfrac{4(3n^2-14n+12)}{n^2(n-1)^2}$

(2)　$X = |r_1 - r_2| = r_2 - r_1$ とおくと，$X = k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$ となる確率は，(1)と同様に，$1 \leqq r_1 \leqq n-k$ から，$\dfrac{n-k}{{}_n\mathrm{C}_2} = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$ となる。これより, X の期待値 $E(X)$ は,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{2} n^2 (n-1) - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \right\} = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$$

(3)　$n = 7$ のとき, (2)より，$E(X) = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$

同様に，$Y = |w_1 - w_2|$ とおくと，$E(Y) = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$ である。

ここで, X と Y は独立なので, A の面積の期待値 $E(XY)$ は,

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{8}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{64}{9}$$

［解 説］

(3)は，範囲外の数 C「確率分布」に出てくる公式を用いましたが，これが普通の解法でしょう。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ に対して，$f(-x)=-f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは原点対称となる。

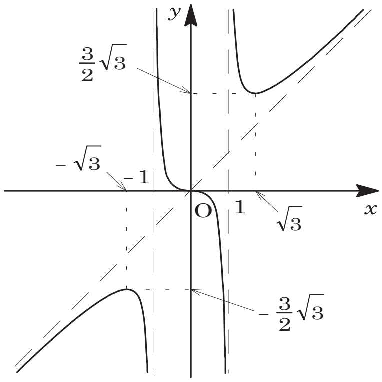
$$f'(x)=1+\frac{(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

よって，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ より，漸近線 $x=1$，$y=x$ が存在する。

以上より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が 3 個になるのは，対称性から，$x>0$ において交点が 1 個となる場合より，

$m<0$，$1<m$

(3)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の $x>0$ における交点は，

$$x+\frac{x}{x^2-1}=mx,\ 1+\frac{1}{x^2-1}=m,\ x^2=m(x^2-1)$$

よって，$x=\sqrt{\dfrac{-m}{1-m}}$ となり，これを $x=\alpha$ とおくと，求める部分の面積 S は，

$$S=2\int_0^{\alpha}\left(x+\frac{x}{x^2-1}-mx\right)dx=2\Big[(1-m)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x^2-1|\Big]_0^{\alpha}$$

$$=(1-m)\alpha^2+\log|\alpha^2-1|=-m-\log(1-m)$$

［解　説］

(2)では，$x\neq 0$ で定数 m を分離して考えた方がクリアーですが，次の(3)の設問から判断すると，それには及ばないでしょう。