1　解答解説のページへ

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, x の関数

$$f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x)=0$ の解を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

図のように，1 を左下のマス目におき，1 の右に 2 を，2 の上に 3 を，3 の左に 4 をおく。次に 2 の右に 5 をおき，5 の上に 6, 7 を，7 の左に 8, 9 をおく。このように，すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく。左から j 番目，下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,\ k)$ と書く。例えば $a(3,\ 4)=14$，$a(3,\ 5)=23$ である。

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1)　$a(1,\ k)$，$a(j,\ 1)$ をそれぞれ k, j の式で表せ。

(2)　$a(j,\ k)$ を $j \geqq k$ と $j < k$ の場合に分けて求めよ。

(3)　$a(j,\ k)=2007$ となる j, k を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間の 2 点 $A(2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ -1,\ 0)$，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3)　上で求めた点 P と C に対し，$\overrightarrow{CP}$ は 2 つの実数 a，b を用いて，$\overrightarrow{CP}=a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}$ と表せることを示せ。

4

解答解説のページへ

p を正の定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線を l とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ。

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。

5

解答解説のページへ

袋の中に, 1 と書いた玉が 2 個, 2 と書いた玉が m 個, 3 と書いた玉が$(8-m)$個, 合計 10 個入っている。ただし, $2 \leqq m \leqq 7$ とする。この袋から玉を 2 個取り出し, それらの玉に書かれた数の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1) $S=4$ となる確率を求めよ。

(2) S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ。

(3) S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ。

(4) E の値を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos2\alpha$ に対し,

$$f'(x)=3\sqrt{2}x^2-6(\sin\alpha)x$$

また, 方程式 $f'(x)=0$ の解は, $x=0$ または $x=\dfrac{6\sin\alpha}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\alpha$ である。

(2)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より, $0<\sqrt{2}\sin\alpha$ となるので, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}\sin\alpha$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると, $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつ条件は,

$$f(0)=\sin\alpha\cos2\alpha>0\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$f(\sqrt{2}\sin\alpha)=4\sin^3\alpha-6\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos2\alpha<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より, $\sin\alpha>0$ なので, $\cos2\alpha>0$ から, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ $\cdots\cdots\cdots$③

②より, $\sin\alpha>0$ なので, $-2\sin^2\alpha+\cos2\alpha<0$

$$-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha<0,\ (2\sin\alpha+1)(2\sin\alpha-1)>0$$

よって, $\sin\alpha>\dfrac{1}{2}$ より, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots\cdots\cdots$④

③④より, 求める α の範囲は, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

［解 説］

微分法の 3 次方程式への応用問題です。三角関数によって味が付けられています。

2

問題のページへ

(1) 題意のマス目を下のように群数列として並べ替えると,

$1 \mid 2\quad 3\quad 4 \mid 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9 \mid 10\quad 11\quad 12\quad 13\quad 14\quad 15\quad 16 \mid 17$

すると, 第 n 群には項が $2n-1$ 個存在するので, 第 n 群の末項までの項数は,

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

さらに, 仕切りを取り去った数列は自然数の列となっているので, 第 n 群の末項は n^2 となる。

さて, $a(1,\ k)$ は第 k 群の末項より, $a(1,\ k)=k^2$

また, $a(j,\ 1)$ は第 j 群の初項より,

$a(j,\ 1)=(j-1)^2+1=j^2-2j+2$

(2) $j \geqq k$ のとき, $a(j,\ k)$ は第 j 群の初項から k 番目の数より,

$a(j,\ k)=a(j,\ 1)+(k-1)=(j-1)^2+k$

また, $j<k$ のとき, $a(j,\ k)$ は第 k 群の末項から逆に数えて j 番目の数より,

$a(j,\ k)=a(1,\ k)-(j-1)=k^2-j+1$

(3) まず, 2007 が第 n 群に属するとすると, $(n-1)^2<2007 \leqq n^2$ となる。

すると, $44^2<2007<45^2$ より, 2007 は第 45 群に属する。

第 44 群の末項は $44^2=1936$ なので, $2007-1936=71$ から, 2007 は第 45 群の 71 番目の数である。

ところで, 第 45 群の項数は $2\times45-1=89$ なので, 2007 は第 45 群の末項から逆に数えて $89-71+1=19$ 番目の数と言い換えることができる。

以上より, $a(19,\ 45)=2007$ となり, $j=19$, $k=45$ である。

(4) (2)より, $a(k,\ k)=(k-1)^2+k$ となり,

$$\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)=\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^2+k\}=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}n(n^2+2)$$

［解 説］

群数列の問題ですが, 注意力がかなり要求されます。具体例を考えて計算を行った方が安全です。

3

問題のページへ

(1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\vec{u}$より, sを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$，$(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$$x=-s+2,\ y=2s,\ z=5s\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\vec{v}$より, tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$，$(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$$x=t,\ y=t-1,\ z=t\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-s+2=t\cdots\cdots③$，$2s=t-1\cdots\cdots④$，$5s=t\cdots\cdots⑥$

③④より，$t=\dfrac{5}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$となり，この値は⑥を満たす。

よって，①より$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$から，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$$-\frac{5}{3}+3\times\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-c=0,\ c=2$$

よって，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$となる。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$より，

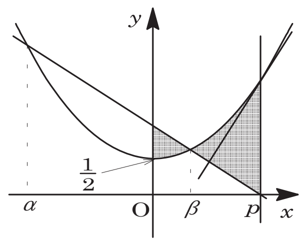
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

［解 説］

(3)では, x成分, y成分より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$の係数をそれぞれ定め, その後, z成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。

4

問題のページへ



(1)　$C : y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ ……①に対して，$y'=x$

すると，$x=p$ のとき $y'=p$ である。

これより，直線 l の傾きは p となり，l に直交する直線 m は，傾きが $-\dfrac{1}{p}$ で，$\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通るので，その方程式は，

$$y=-\frac{1}{p}(x-p),\ y=-\frac{1}{p}x+1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　C と m の交点の x 座標は，①②から，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{p}x+1$，$x^2+\dfrac{2}{p}x-1=0$

ここで，$f(x)=x^2+\dfrac{2}{p}x-1$ とおくと，

$$f(0)=-1<0,\ f(p)=p^2+1>0$$

よって，$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\alpha<0<\beta<p$ である。

(3)　$S_1=\displaystyle\int_0^{\beta}\Big(-\frac{1}{p}x+1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\Big)dx$，$S_2=\displaystyle\int_{\beta}^{p}\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx$ より，

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\int_{\beta}^{p}\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx+\int_0^{\beta}\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx\\&=\int_0^{p}\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx=\Big[\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2p}x^2-\frac{1}{2}x\Big]_0^p\\&=\frac{p^3}{6}+\frac{1}{2p}p^2-\frac{1}{2}p=\frac{p^3}{6}\end{aligned}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。(3)では，S_1，S_2 を単独で求めずに S_1-S_2 を計算すればよいということは，問題文から推測できます。

5

問題のページへ

(1)　まず, 10 個の玉から 2 個取り出す ${}_{10}C_2 = 45$ 通りが同様に確からしい。

さて, $S = 4$ となるのは, 1 と書いた玉を 1 個と 3 と書いた玉を 1 個取り出す場合か, 2 と書いた玉を 2 個取り出す場合のいずれかより, その場合の数は,

$${}_2C_1 \times {}_{8-m}C_1 + {}_mC_2 = 2(8-m) + \frac{1}{2}m(m-1)$$

よって, $S = 4$ となる確率は,

$$\frac{2(8-m) + \frac{1}{2}m(m-1)}{45} = \frac{m^2 - 5m + 32}{90}$$

(2)　S を 3 で割った余りが 2 であるのは, $2 \leqq S \leqq 6$ より, $S = 2,\ 5$ である。

(i)　$S = 2$ のとき

1 と書いた玉を 2 個取り出す場合より, その確率は, $\frac{{}_2C_2}{45} = \frac{1}{45}$ である。

(ii)　$S = 5$ のとき

2 と書いた玉を 1 個と 3 と書いた玉を 1 個取り出す場合より, その確率は,

$$\frac{{}_mC_1 \times {}_{8-m}C_1}{45} = \frac{m(8-m)}{45}$$

(i)(ii)より, S を 3 で割った余りが 2 である確率は,

$$\frac{1}{45} + \frac{m(8-m)}{45} = \frac{-m^2 + 8m + 1}{45}$$

(3)　S を 3 で割った余りが 1 であるのは, $S = 4$ の場合だけである。

(1)(2)より, S を 3 で割った余りは 0, 1, 2 のいずれかなので, その期待値 E は,

$$E = 1 \times \frac{m^2 - 5m + 32}{90} + 2 \times \frac{-m^2 + 8m + 1}{45} = \frac{-m^2 + 9m + 12}{30}$$

(4)　(3)より, $E = -\frac{1}{30}\left(m - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{43}{40}$ と変形する。

すると, m は整数より, E は $m = 4$ または $m = 5$ のとき最大となり, その値は $\frac{-16 + 36 + 12}{30} = \frac{16}{15}$ である。

［解 説］

確率の基本問題です。誘導に従えばよいように, 問題が構成されています。